



Étude des lois de paroi d'ordre 1 et 2 pour des domaines rugueux par décomposition de domaine

Yves Achdou, Olivier Pironneau, Frederic Valentin

► To cite this version:

Yves Achdou, Olivier Pironneau, Frederic Valentin. Étude des lois de paroi d'ordre 1 et 2 pour des domaines rugueux par décomposition de domaine. [Rapport de recherche] RR-3326, INRIA. 1997. inria-00073363

HAL Id: inria-00073363

<https://hal.inria.fr/inria-00073363>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Étude des Lois de Paroi d'Ordre 1 et 2 pour des
Domaines Rugueux par Décomposition de
Domaine***

Y. Achdou , O. Pironneau & F. Valentin

N° 3326

19 décembre 1997

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***



Étude des Lois de Paroi d'Ordre 1 et 2 pour des Domaines Rugueux par Décomposition de Domaine

Y. Achdou^{*}, O. Pironneau[†] & F. Valentin[‡]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes

Projet M3N

Rapport de recherche n° 3326 — 19 décembre 1997 — 74 pages

Résumé : Dans ce travail, on présente une nouvelle approche pour construire des lois de paroi adaptées à des domaines rugueux. On procède au développement des lois de paroi d'ordre un et deux pour les équations de Laplace et Stokes, puis on effectue une analyse d'erreur. Plusieurs tests numériques valident les nouvelles lois de paroi et établissent leur efficacité.

Mots-clé : méthode de décomposition de domaine, lois de paroi, interface rugueuse, équation de Laplace, équations de Stokes

(Abstract: pto)

^{*} e-mail: yves.achdou@insa-rennes.fr

[†] e-mail: pironneau@ann.jussieu.fr

[‡] The author was supported by Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) - Brazil - e-mail: frederic.valentin@inria.fr

Analysis of the First and Second Order Wall Laws for Rough Domains by Domain Decomposition

Abstract: We present a new approach to construct wall laws adapted to rough boundaries. First and the second order wall laws are proposed for the Laplace equation and the Stokes problem. We validate the new wall laws by several numerical tests, showing the necessity of their applications for capturing the effect of variable rough walls.

Key-words: domain decomposition method, wall law, rough interface, Laplace equation, Stokes equations

Table des matières

1	Introduction	4
2	Idée de base	6
3	Analyse d'erreur pour l'équation de Laplace	7
3.1	Notations et résultat préliminaire	7
3.2	Loi de paroi d'ordre 1	9
3.3	Loi de paroi d'ordre 2	13
3.4	Équivalence entre M.D.A. et M.D.D.	16
3.4.1	Rappel de lois de paroi par M.D.A.	16
3.4.2	Changement de variables	18
4	Analyse d'erreur pour les équations de Stokes	20
4.1	Notations et résultats préliminaires	20
4.2	Loi de paroi d'ordre 1	24
4.3	Loi de paroi d'ordre 2	31
4.4	Équivalence entre M.D.A. et M.D.D	38
5	Validations numériques	43
5.1	Plaque plane avec rugosités rectangulaires	43
5.2	Canal rugueux	48
5.3	Diffuseur avec rugosités sinusoïdales	63
6	Conclusion	73

1 Introduction

L'étude des écoulements sur des parois rugueuses constitue un sujet important en aérodynamique. En effet, les coques de bateaux, les pales de turbines ou encore le bouclier thermique d'une capsule spatiale présentent des rugosités qui modifient les performances aérodynamiques du corps (voir [11] et [12]). En météorologie et en océanographie, le problème d'interface océan-atmosphère passe par la prise en compte de l'influence des vagues et donc d'une interface rugueuse. Dans les deux cas, on retrouve la même difficulté de traiter des échelles de longueur différentes. En raison du coût élevé de résolution des équations de Navier-Stokes dans de tels domaines, les ingénieurs et météorologues ne traitent généralement que les grandes échelles en approchant l'état rugueux du domaine par une condition équivalente. Ainsi leur étude consiste à remplacer la paroi rugueuse par une paroi lisse, placée à une hauteur déterminée empiriquement. Ces approximations peuvent être insuffisantes. Il est donc indispensable de mettre au point de nouvelles approches pour traiter ces petites échelles à un faible coût. Le coût du calcul est le principal facteur limitant, car une description précise de la géométrie des rugosités, ainsi que le traitement numérique des couches limites (la vitesse passe de zéro à $O(1)$ sur une distance $\delta \approx O(\sqrt{\text{viscosité}})$), nous obligeant à utiliser des maillages extrêmement fins.

Les lois de paroi permettent de retirer du domaine de calcul la région de fort gradient contenant les rugosités. Les lois de paroi sont des conditions aux limites équivalentes du type Navier imposées à l'intérieur du domaine, ayant pour objectif de simuler l'influence de la paroi. Les premières lois de paroi ont été établies de façon empirique dans le cadre des écoulements turbulents sur parois lisses et validées par des nombreux essais expérimentaux [10]. Ces lois de paroi sont une extension de la loi logarithmique, mais certaines constantes doivent être modifiées en fonction de la géométrie de l'obstacle [12]. Cependant, jusqu'à présent, aucune loi de paroi générale n'a été établie pour simuler de façon automatique l'influence de la géométrie des rugosités sur l'écoulement global. De plus, ces lois de paroi manquent d'une base mathématique solide qui permettraient, non seulement d'établir des estimations d'erreur, mais aussi d'envisager des généralisations à des cas plus complexes.

La première tentative d'établir une méthode plus générale pour construire des lois de paroi, a été présentée par Carrau-LeTallec ([7] et [8]) dans le cadre d'écoulements laminaires compressibles sur des parois rugueuses périodiques. La méthode est basée sur une approche par homogénéisation, à partir de la décomposition de domaine en une partie locale, contenant des rugosités périodiques, et une partie globale où est imposée la loi de paroi. En raison de la périodicité des rugosités, on suppose l'écoulement périodique à l'échelle locale et on résout un problème de cellule contenant une rugosité, avec condition de périodicité dans la direction de l'écoulement et flux constant imposé à l'interface supérieure. Cette approche a l'avantage de pouvoir être étendue à des écoulements plus complexes (voir [14] pour son application en turbulence) et de restreindre l'influence de la forme des rugosités au calcul d'un problème local de cellule. En revanche, la mise en oeuvre est coûteuse pour des problèmes non-linéaires (exemple Navier-Stokes), en raison de la nécessité de

résoudre plusieurs problèmes de Navier-Stokes dans le domaine local, pour effectuer la tabulation de la loi de paroi. De plus, le cadre mathématique proposé n'est pas adapté à l'analyse d'erreur.

Un deuxième cadre mathématique pour construire les lois de paroi a été présenté par Achdou [1] dans le contexte des équations de Maxwell. Comme dans les travaux de Conca [9] une méthode de développement asymptotique à deux échelles (M.D.A.) est utilisée. Récemment, Achdou et al. (voir [3], [6] et [4]) ont étendu l'approche à la mécanique des fluides, en développant de nouvelles lois de paroi pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Dans ce travail, on va poursuivre l'étude de l'approche proposée par Achdou-Pironneau [2] pour l'équation de Laplace. La stratégie consiste à construire des lois de paroi à partir de l'idée originale de Carrau-LeTallec, mais en obtenant des lois de paroi analytiques construites à un faible coût.

Dans la première partie, on présente les idées principales de la méthode de décomposition de domaine (M.D.D.). La deuxième partie est consacrée au développement des lois de paroi pour l'équation de Laplace à l'ordre un et deux et leur analyse d'erreur. L'équivalence avec l'approche M.D.A. est présentée. Les nouvelles lois de paroi d'ordre un et deux pour le problème de Stokes sont établies et analysées dans la troisième partie. Plusieurs tests numériques sont présentés et valident les nouvelles lois de paroi dans la cinquième partie.

2 Idée de base

Dans la suite, et sans restrictions, on travaillera en dimension deux. L'idée principale de la méthode de décomposition de domaine est d'isoler les différentes échelles dans des domaines différents. On introduit une interface fictive Γ_0 (supposée droite) divisant le domaine réel Ω en un domaine global Ω_0 et un domaine local noté Ω_w . Les sections droites à gauche et à droite de Ω sont notées respectivement par Γ_{in} et Γ_{out} , et l'interface supérieure par Γ_∞ . Le domaine local contient les rugosités périodiques de dimension caractéristique ε (petit devant l'unité). Donc, si on note par Ω_{loc}^ε une cellule contenant une rugosité, on obtient Ω_w comme l'union des translatées de la cellule Ω_{loc}^ε . On note par Γ_b la frontière rugueuse de Ω_w . La cellule Ω_{loc}^ε est limitée par une partie de la paroi Γ_w^ε de dimensions caractéristiques $O(\varepsilon)$, sur les cotés par des demi-droites Γ_l^ε et Γ_r^ε et en haut par une section droite $x_2 = \delta$ où δ est de l'ordre de ε . On note par Ω_{loc} la cellule Ω_{loc}^ε dilatée avec un rapport $\frac{1}{\varepsilon}$ ainsi que par Γ_w , Γ_l , Γ_r et Γ_{sup} les frontières inférieure, gauche, droite et supérieure de la nouvelle cellule.

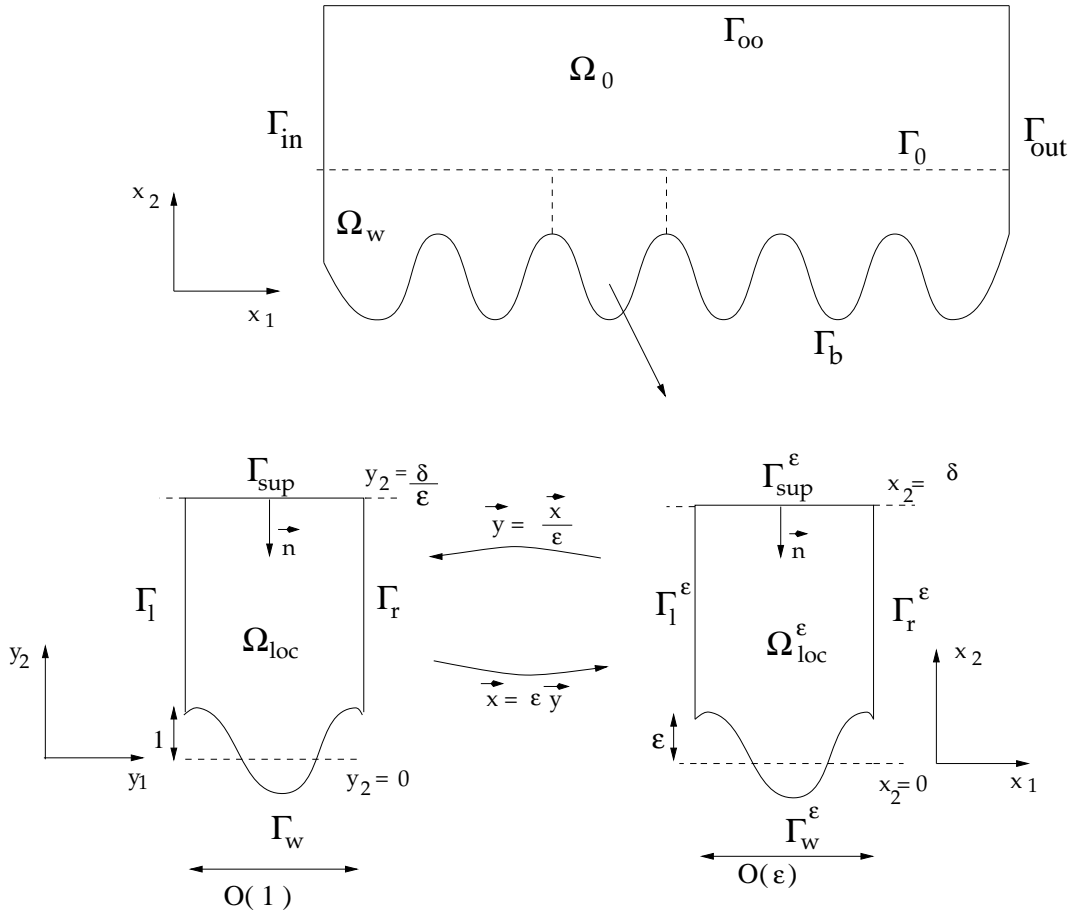


FIG. 1: décomposition du domaine - domaine global et local

Les domaines sont décrits en variables cartésiennes $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, on utilisera les variables rapides $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \equiv \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$. On note le vecteur tangent à Γ_0 par

$\mathbf{s} = (1, 0)$ et la normale extérieure à Γ_0 par $\mathbf{n} = (0, -1)$. Les opérateurs de dérivation par rapport à la variable \mathbf{y} seront indexés par \mathbf{y} . L'absence d'indice signifie que la dérivation est faite par rapport à \mathbf{x} . Donc si $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$\begin{aligned}\nabla u &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u} + \nabla \tilde{u} \\ \nabla \cdot u &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{u} + \nabla \cdot \tilde{u} \\ \Delta u &= \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{u} + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_{\mathbf{xy}} \tilde{u} + \Delta \tilde{u}\end{aligned}\tag{1}$$

où $\Delta_{\mathbf{xy}} \tilde{u} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}$.

On considère un problème aux limites elliptique posé dans Ω avec condition de Dirichlet homogène sur Γ_b , dont la solution est notée u^ε . Dans chaque sous-domaine, on définit une approximation de u^ε définie dans Ω , construite de façon à tendre vers u^ε quand ε tend vers zéro. La fonction approchant u^ε dans le domaine global sera la solution de l'E.D.P. originale, avec une condition aux limites du type Robin sur Γ_0 . Cette condition aux limites tiendra compte de l'influence moyenne des rugosités sur l'écoulement à l'échelle globale. Pour la simplicité de la présentation, on impose des conditions aux limites périodiques entre Γ_{in} et Γ_{out} et Dirichlet homogène sur Γ_∞ , pour le problème aux limites original et pour les problèmes d'approximation.

La géométrie périodique des rugosités tend à rendre l'écoulement à l'échelle locale périodique. L'approximation locale u_{loc} définie dans Ω_{loc}^ε , sera obtenue en fonction d'un ou plusieurs correcteurs, solutions de problèmes aux limites dans la cellule Ω_{loc} . L'erreur entre la solution exacte et cette approximation provient de discontinuités entre u_0 et u_{loc} sur l'interface fictive Γ_0 et du fait que u_{loc} ne satisfait pas a priori l'équation originale dans Ω_{loc}^ε . L'adjonction successive de correcteurs permet de contrôler ces erreurs à l'ordre désiré.

Dans la suite, on appliquera cette stratégie pour développer d'abord des lois de paroi pour l'équation de Laplace, puis pour les étendre aux problèmes de Stokes.

3 Analyse d'erreur pour l'équation de Laplace

3.1 Notations et résultat préliminaire

Soit $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ la solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_b, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ u^\varepsilon & \text{périodique} \end{cases}\tag{2}$$

avec f "suffisamment régulière", dont le support est strictement inclu dans Ω_0 .

Soit u_0 la solution du problème de Laplace de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 + F\left(\langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|}, \nabla u_0, \dots, \langle \chi^k \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|}, D^{k+1}u_0, \right) = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (3)$$

où

- k est l'ordre de l'approximation désiré,
- les fonctions $\chi^i = \chi^i(\mathbf{y})$ sont des correcteurs, solutions des problèmes de cellules définis en variable rapide du type

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^i = f_i(\nabla \chi^{i-1}) & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^i = 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \chi^i & y_1 - \text{périodique} \\ \frac{\partial \chi^i}{\partial \mathbf{n}} = g_i(y_2) & \text{sur } \Gamma_{\text{sup}}, \end{cases} \quad (4)$$

- $\langle \chi^i \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|}$ désigne la moyenne de χ^i sur l'interface Γ_{sup} , i.e,

$$\langle \chi^i \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} = \frac{1}{|\Gamma_{\text{sup}}|} \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi^i \left(y_1, \frac{\delta}{\varepsilon} \right) dy_1.$$

La fonction $u_{loc}(\mathbf{x})$ approchant la solution exacte dans le domaine local Ω_{loc}^ε est définie comme

$$u_{loc} = G\left(\chi^0, \nabla u_0|_{\Gamma_0}, \dots, \chi^k, D^{k+1}u_0|_{\Gamma_0}, \right)$$

Remarque 1 :

Les fonctionnelles linéaires F , f_i , g_i et G seront définies ultérieurement pour les ordres 1 et 2.

Soit l'erreur $e(\mathbf{x}) = u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})$, où $u(\mathbf{x})$ est définie par

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ u_{loc}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_{loc}^\varepsilon. \end{cases}$$

L'étude d'erreur est basée sur le résultat suivant

Lemme 1

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et Γ une interface qui sépare Ω en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+ . Soit e une fonction satisfaisant $\Delta e = 0$ dans $\Omega^- \cup \Omega^+$, $e = 0$ sur $\partial\Omega^- \setminus \Gamma$ et $\partial\Omega^+ \setminus \Gamma$. Si $[e]$ représente le saut de e sur Γ , alors

$$\|e\|_{1,\Omega_-} + \|e\|_{1,\Omega_+} \leq C \left(\| [e] \|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \left\| \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \right)$$

Démonstration : Achdou et Pironneau [2].

3.2 Loi de paroi d'ordre 1

L'objectif est de développer une nouvelle loi de paroi pour des domaines rugueux, de façon à ce que l'erreur e soit de l'ordre ε dans la norme $H^1(\Omega)$.

On propose de définir u_0 l'approximation dans le domaine global, comme solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u_0 &= f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 + \varepsilon \langle \chi^0 \rangle \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (5)$$

et d'approcher la solution exacte par u_{loc} dans Ω_{loc}^ε , donnée par l'expression

$$u_{loc}(\mathbf{x}) = \varepsilon \chi^0 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \left(-\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \right) \quad (6)$$

où la fonction χ^0 est un correcteur, solution d'un problème de Laplace dans la cellule Ω_{loc}

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 &= 0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^0 &= 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \chi^0 & y_1 - \text{périodique} \\ \frac{\partial \chi^0}{\partial \mathbf{n}} &= 1 & \text{sur } \Gamma_{sup}. \end{cases} \quad (7)$$

Remarque 2 :

Le principe du maximum faible (voir par exemple [13]) implique que χ_0 soit non négatif et que $\langle \chi^0 \rangle_{\Gamma_{sup}} > 0$.

Il est clair que $[u^\varepsilon]_{|\Gamma_0} = \left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \right]_{|\Gamma_0} = 0$. Alors si on utilise les définitions (5)-(7), la fonction erreur $e(\mathbf{x})$ satisfait dans Ω

1.

$$\begin{aligned} -\Delta e &= 0, \text{ dans } \Omega_0 \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + 2 \frac{\partial \chi_0}{\partial y_1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon \chi_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} \\ &= 2 \frac{\partial \chi_0}{\partial y_1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon \chi_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0}, \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon \end{aligned} \quad (8)$$

2.

$$\left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right]_{|\Gamma_0} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - \frac{\partial \chi_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{sup}} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right) = 0 \quad (9)$$

3.

$$\begin{aligned} [e]_{|\Gamma_0} &= \left(u_0 + \varepsilon \chi^0|_{\Gamma_{sup}} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right) \\ &= \varepsilon \left(\chi^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \end{aligned} \quad (10)$$

Pour l'analyse d'erreur, on a besoin des résultats suivants :

Lemme 2

Si f est de classe C^∞ à support compact inclu strictement dans Ω_0 , alors pour tout $m \geq 0$, $u|_{\Gamma_0}$ est borné dans la norme de $W^{m,\infty}(\Gamma_0)$ par $C\varepsilon$ où C est une constante indépendante de ε .

Démonstration :

On suppose que $\langle \chi^0 \rangle \neq 0$, (le résultat est immédiat dans le cas contraire). En utilisant la formulation faible de (5), on obtient en prenant u_0 comme fonction test que

$$\|u_0\|_{0,\Gamma_0} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

et d'autre part directement que

$$\|u_0\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq C\varepsilon.$$

En dérivant les équations de (5) dans la variable x_1 , on obtient que les mêmes estimations sont valables pour $\frac{\partial^m u_0}{\partial x_1^m}$ pour m arbitraire.

D'autre part, pour $m \geq 1$, on a

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial^m u_0}{\partial x_1^m} = 0,$$

car u_0 est périodique.

De l'inégalité de Poincaré-Wirtinger appliquée à $\frac{\partial^m u_0}{\partial x_1^m}|_{\Gamma_0}$, on déduit que

$$\left\| \frac{\partial^m u_0}{\partial x_1^m} \right\|_{0,\Gamma_0} \leq C\varepsilon.$$

Il ne reste qu'à obtenir l'estimation désirée pour u_0 : pour cela on prend comme fonction test dans la formulation variationnelle une fonction φ périodique, constante sur Γ_0 , nulle sur le bord supérieur de Ω_0 dont la norme H^1 est bornée par une constante: On obtient que

$$\left| \int_{\Gamma_0} u_0 \right| \leq C\varepsilon.$$

On conclut avec l'inégalité de Poincaré Wirtinger appliquée à u_0 sur Γ_0 et l'estimation $\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right\|_{0,\Gamma_0} \leq C\varepsilon$.

On a donc démontré que $\forall m > 0$, m entier,

$$\|u_0\|_{W^{m,2}(\Gamma_0)} \leq C\varepsilon.$$

Pour conclure, on utilise la continuité des injections de Sobolev.

□

Remarque 3 :

Ce théorème implique que pour tout $m \geq 0$, $\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0}$ est borné dans la norme de $W^{m,\infty}(\Gamma_0)$ par C où C est une constante indépendante de ε .

Lemme 3

L'erreur $\left\| \chi_{|\Gamma_{sup}}^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{sup}}$ décroît exponentiellement vite vers 0 avec δ .

Démonstration : Voir paragraphe 3.4.2.

On est donc prêt à présenter le théorème suivant

Théorème 1 (ordre 1)

La fonction erreur e est bornée dans $H^1(\Omega)$ et satisfait

$$\|e\|_{1,\Omega_0} + \|e\|_{1,\Omega_w} \leq C\varepsilon\delta^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration

On note les termes de droite de (8) par g . Par le Lemme 1,

$$\|e\|_{1,\Omega_0} + \|e\|_{1,\Omega_w} \leq C \left(\|g\|_{0,\Omega} + \|[e]\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \left\| \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} \right),$$

donc on doit étudier l'ordre de grandeur de $[e]|_{\Gamma_0}$, $\left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right]|_{\Gamma_0}$ et g . Les deux premiers termes sont immédiats. En effet $\|[e]\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq C\varepsilon \|\chi^0 - \langle \chi^0 \rangle\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{\text{sup}}}$ grâce au Lemme 2 et $\left\| \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} = 0$. Cependant le terme g n'est pas petit, ce qui nous amène à introduire un nouveau correcteur.

Soit la fonction $\tilde{e}(\mathbf{x})$ définie par $\tilde{e}(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) - \varepsilon^2 \chi^1 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. La fonction χ^1 est le nouveau correcteur, solution du problème de cellule

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 &= 2 \frac{\partial \chi_0}{\partial y_1} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \chi^1 & y_1 - \text{périodique} \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & \text{sur } \Gamma_{sup}. \end{cases}$$

Donc par construction, la fonction \tilde{e} satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{e} & \approx O(\varepsilon) \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon \\ -\Delta \tilde{e} & = 0 \text{ dans } \Omega_0 \\ \left\| \left[\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} & = \left\| \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} = 0 \\ \|\tilde{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} & \leq \|[e]\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + O\left(\varepsilon \delta^{\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

alors par le Lemme 1, $\|\tilde{e}\|_{1,\Omega} \leq C \left(\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{\text{sup}}} + \varepsilon \delta^{\frac{1}{2}} \right)$.

Mais on remarque que le terme $\varepsilon^2 \chi^1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0}$ est d'ordre $\varepsilon \delta^{\frac{1}{2}}$ et par le Lemme 3 le résultat suit.

□

Remarque 4 :

Le résultat a été présenté par Achdou et Pironneau dans [2] pour Γ_0 courbe, en définissant $u_{loc}(\mathbf{x}) = \frac{\chi^0}{\langle \chi^0 \rangle} u_0|_{\Gamma_0}$ dans Ω_{loc}^ε . La courbure ajoute à l'erreur un terme $\frac{\varepsilon}{R_0}$, où R_0 est le rayon de courbure de Γ_0 .

Remarque 5 :

Dans le cas particulier d'une plaque plane, le problème (7) devient 1D et nous avons la solution exacte $\chi^0 = y_2$ dans Ω_{loc} . Donc la loi de paroi d'ordre un s'écrit comme

$$u_0 + \delta \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ sur } \Gamma_0.$$

3.3 Loi de paroi d'ordre 2

La loi de paroi d'ordre un peut s'avérer insuffisante pour approcher correctement u^ε . L'objectif est de développer une approximation d'ordre deux, de façon à ce que l'erreur soit en ε^2 dans la norme $H^1(\Omega)$. De la même façon que pour l'ordre un, on commence par définir les problèmes aux limites pour u_0 et u_{loc} , pour ensuite estimer l'erreur.

Soit $u_0(\mathbf{x})$ la solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 + \varepsilon \langle \chi^0 \rangle \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon^2 \langle \chi^1 \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (11)$$

et u_{loc} , l'approximation de u^ε dans Ω_{loc}^ε donnée par

$$u_{loc} = \varepsilon \chi^0 \left(-\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right) + \varepsilon^2 \chi^1 \left(-\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \right)$$

où le nouveau correcteur χ^1 , est solution du problème de cellule

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \chi^1 = y_1 - \text{périodique} & \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{sup}}. \end{cases} \quad (12)$$

Alors, par la régularité de la solution exacte u^ε et par les définitions (11)-(12), la fonction erreur $e(\mathbf{x})$ satisfait

$$\begin{aligned}
1. \quad & -\Delta e = 0, \text{ dans } \Omega_0 \\
& = \frac{1}{\varepsilon} \Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon \chi^0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} + \\
& \quad + \Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} + O(\varepsilon^2) \\
& = +\varepsilon \left(\chi^0 + 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} + O(\varepsilon^2), \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] |_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - \frac{\partial \chi^0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - \varepsilon \frac{\partial \chi^1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & [e] |_{\Gamma_0} = u_0|_{\Gamma_0} + \varepsilon \chi^0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon^2 \chi^1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
& = \varepsilon \left(\chi_{|\Gamma_{\text{sup}}}^0 - \langle \chi^0 \rangle |_{\Gamma_{\text{sup}}} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + \\
& \quad + \varepsilon^2 \left(\chi_{|\Gamma_{\text{sup}}}^1 - \langle \chi^1 \rangle |_{\Gamma_{\text{sup}}} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0}
\end{aligned} \tag{15}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 4

L'erreur $\left\| \chi_{|\Gamma_{\text{sup}}}^1 - \langle \chi^1 \rangle |_{\Gamma_{\text{sup}}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{\text{sup}}}$ décroît exponentiellement vite vers 0 avec δ .

Démonstration : Voir paragraphe 3.4.2.

L'erreur d'approximation d'ordre deux est la suivante :

Théorème 2 (ordre 2)

L'erreur e est bornée dans $H^1(\Omega)$ par

$$\|e\|_{1, \Omega_0} + \|e\|_{1, \Omega_w} \leq C \varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration :

La stratégie est la même que celle de l'ordre un. Les termes de droite de (13) sont notés par g . Par le Lemme 1,

$$\|e\|_{1,\Omega_0} + \|e\|_{1,\Omega_w} \leq C \left(\|g\|_{0,\Omega} + \| [e] \|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \left\| \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} \right).$$

Les deux sauts sont majorés de la façon suivante: d'après le Lemme 2, $\| [e] \|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq C \left(\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{sup}} + \varepsilon^2 \left\| \chi^1 - \langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{sup}} \right)$ et $\left\| \left[\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} = 0$. Cependant, le terme $g \approx \varepsilon$ n'est pas suffisamment petit, ce qui nous amène à introduire un nouveau correcteur.

Soit la fonction $\tilde{e}(\mathbf{x})$ définie par $\tilde{e}(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) - \varepsilon^3 \xi \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Le nouveau correcteur $\xi \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ est solution du problème de cellule

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_{\mathbf{y}} \xi &= \chi^0 + 2 \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \xi &= 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \xi &= y_1 - \text{périodique} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= 0 & \text{sur } \Gamma_{sup} \end{array} \right.$$

alors par construction

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{e} \approx O(\varepsilon^2) \\ \left\| \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} = \left\| \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} = 0 \\ \|\tilde{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq \|e\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + O\left(\varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}}\right) \end{array} \right.$$

Donc par le Lemme 1

$$\|e\|_{1,\Omega_0} + \|e\|_{1,\Omega_w} \leq C \left(\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{sup}} + \varepsilon^2 \left\| \chi^1 - \langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{sup}} + \varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}} \right).$$

Mais le terme $\varepsilon^3 \xi \frac{\partial^3 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0}$ est d'ordre $\varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}}$ et par les Lemmes 3 et 4, le résultat suit.

□

Remarque 6 :

Pour le cas particulier d'une plaque plane, les problèmes (7) et (12) ont les solutions exactes $\chi^0 = y_2$ et $\chi^1 = 0$ dans Ω_{loc} , respectivement. Donc la loi de paroi d'ordre deux est donnée par

$$u_0 + \delta \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma_0$$

et coïncide avec la loi d'ordre un.

Dans le cas plus général où la rugosité est symétrique en la variable x_1 , il est facile de vérifier que χ^1 est antisymétrique, et donc $\langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{sup}} = 0$. La condition d'ordre un est donc en fait d'ordre deux.

Remarque 7 :

On peut écrire une autre loi à l'ordre deux en remarquant que en dérivant la loi de paroi d'ordre un (5) par rapport à \mathbf{s} , on obtient

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} = -\varepsilon \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0}. \quad (16)$$

Alors, en substituant (16) dans (11) et en utilisant le fait que $\langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} > 0$, on obtient une nouvelle loi de paroi d'ordre deux sur Γ_0 qui s'écrit

$$u_0 = \varepsilon \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} - \varepsilon \frac{\langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{sup}}}{\langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}}} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{s}}.$$

Cette loi est plus maniable que la précédente car elle ne porte que sur des dérivées premières. Les deux lois sont différentes mais les solutions des problèmes globaux correspondants diffèrent par une erreur d'ordre inférieur à deux.

3.4 Équivalence entre M.D.A. et M.D.D.

Les lois de paroi peuvent également être construites à partir des méthodes de développement asymptotique à deux échelles (M.D.A) (voir par exemple [1], [2] et [5]). Dans ce paragraphe, on se propose de montrer l'équivalence entre ces deux approches pour l'équation de Laplace.

3.4.1 Rappel de lois de paroi par M.D.A.

La base de cette approche consiste à représenter u^ε par une séquence d'ansatz, fonction de la variable lente \mathbf{x} et de la variable rapide $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$:

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon v_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

La fonction u_0 est la solution d'un problème de Laplace dans Ω_m avec des conditions aux limites périodiques sur Γ_{in} et Γ_{out} et Dirichlet homogène sur Γ_∞ , satisfaisant une loi de paroi imposée sur l'interface fictive Γ_m , introduite dans un premier temps à $x_2 = 0$. Les fonctions $v_i, i = 0, \dots$ sont des correcteurs définis dans une cellule semi-infinie C_ε , limitée inférieurement par une rugosité Γ_ε , à droite et à gauche par des droites Γ_d^ε et Γ_g^ε , avec des conditions aux limites périodiques dans la direction x_1 et s'annulant quand $\frac{x_2}{\varepsilon}$ tend vers l'infini.

Au premier ordre, l'approximation de $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ par M.D.A. s'écrit

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \left(\bar{\chi}^0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) - C_0 \right) \left(-\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_m} \right), \quad (17)$$

avec C_0 la constante telle que le correcteur d'ordre un $\bar{\chi}^0(\mathbf{y})$ soit l'unique solution du problème de cellule

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^0 = 0 & \text{dans } C_\varepsilon, \\ \bar{\chi}^0 = y_2 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \bar{\chi}^0 = y_1 - \text{périodique} \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \bar{\chi}^0 = C_0. \end{cases} \quad (18)$$

De plus on montre que $\bar{\chi}^0 - C_0 \rightarrow 0$ exponentiellement à l'infini.

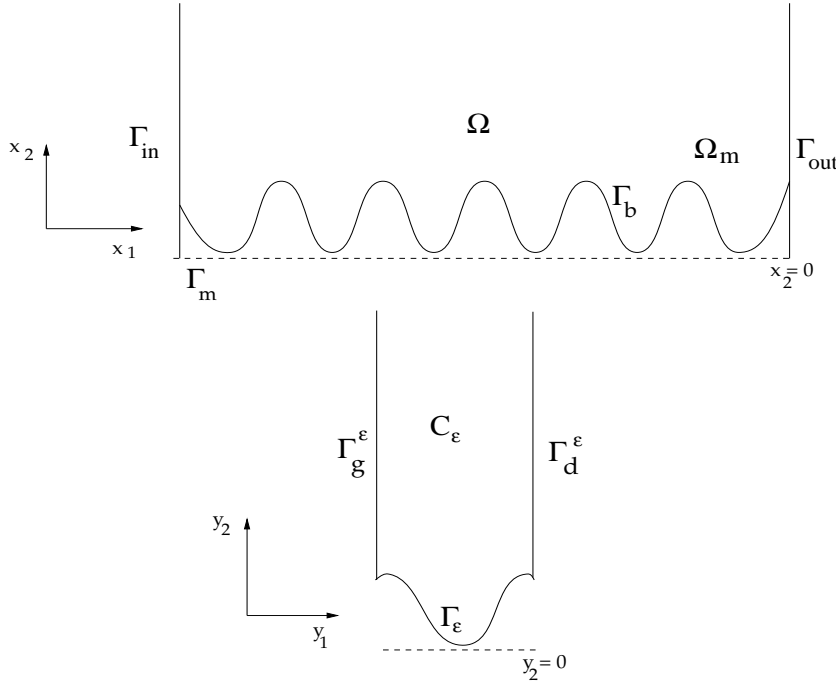


FIG. 2: *Domaine pour la M.D.A. La cellule de contrôle est infinie, au contraire de celle par M.D.D.*

La solution globale $u_0(\mathbf{x})$ définie dans Ω_m , est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_m, \\ u_0 - \varepsilon C_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (19)$$

À l'ordre deux $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ est approchée par

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \left(\bar{\chi}^0\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) - C_0 \right) \left(-\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_m} \right) + \varepsilon^2 \left(\bar{\chi}^1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) - C_1 \right) \left(-\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_m} \right) \quad (20)$$

où C_1 est la constante telle que le correcteur $\bar{\chi}^1(\mathbf{y})$ soit l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^1 = 2 \frac{\partial \bar{\chi}^0}{\partial y_1} & \text{dans } C_\varepsilon, \\ \bar{\chi}^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \bar{\chi}^1 = y_1 - \text{périodique} \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \bar{\chi}^1 = C_1 & \text{exponentiellement} \end{cases} \quad (21)$$

et la fonction $u_0(\mathbf{x})$ est définie comme étant la solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_m, \\ u_0 - \varepsilon C_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} - \varepsilon^2 C_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} = 0 & \text{sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (22)$$

Montrons que les deux approches sont équivalentes.

3.4.2 Changement de variables

Par un simple changement de variables, on retrouve l'équivalence entre les cellules venant des deux approches. En effet, en effectuant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} \tilde{\chi}^0 = -\bar{\chi}^0 + y_2, \\ \tilde{\chi}^1 = -\bar{\chi}^1, \end{cases} \quad (23)$$

nous obtenons

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\chi}^0 &= \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^0 = 0 && \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \tilde{\chi}^0|_{\Gamma_\varepsilon} &= -\bar{\chi}^0|_{\Gamma_\varepsilon} + y_2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\chi}^0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{\text{sup}}} &= -\frac{\partial \bar{\chi}^0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{\text{sup}}} + 1, \\ \tilde{\chi}^0 y_1 - \text{périodique} &\Leftrightarrow \bar{\chi}^0 y_1 - \text{périodique} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\chi}^1 &= \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^1 = -2 \frac{\partial \bar{\chi}^0}{\partial y_1} = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\
\tilde{\chi}^1|_{\Gamma_\epsilon} &= -\bar{\chi}^1|_{\Gamma_\epsilon} = 0, \\
\frac{\partial \tilde{\chi}^1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{sup}} &= -\frac{\partial \bar{\chi}^1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{sup}} \\
\tilde{\chi}^1 y_1 - \text{périodique} &\Leftrightarrow \bar{\chi}^1 y_1 - \text{périodique}
\end{aligned}$$

Mais $\left| \frac{\partial \bar{\chi}^0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{sup}} \right|$ et $\left| \frac{\partial \bar{\chi}^1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_{sup}} \right|$ tendent exponentiellement vite vers 0 avec δ . Donc quand δ tend vers l'infini, $\tilde{\chi}^0$ et $\tilde{\chi}^1$ tendent exponentiellement vite vers χ^0 et χ^1 . De ce fait,

$$\begin{aligned}
\left\| \chi^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} &\approx \left\| \tilde{\chi}^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \tilde{\chi}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \\
&= \left\| \bar{\chi}^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \bar{\chi}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \\
&\leq \left\| \bar{\chi}^0|_{\Gamma_{sup}} - C_0 \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \left\| C_0 - \langle \bar{\chi}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{24}$$

exponentiellement avec δ , et de façon analogue $\left\| \chi^1|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi^1 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \rightarrow 0$ exponentiellement avec δ .

De plus, on remarque que la condition aux limites (11) posée sur Γ_0 peut se déduire de (20) posée sur Γ_m par un développement de Taylor: si u_0 est la solution de (20), on a

$$\begin{aligned}
u_0|_{\Gamma_m} &\approx \varepsilon \left(C_0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon^2 C_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
&= -\varepsilon \langle \chi^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_m} - \varepsilon^2 \langle \chi^1 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_m}
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} = O(\varepsilon)$ et en négligeant les termes d'ordre ε^3 .

En conclusion, les deux méthodes sont équivalentes pour le problème de Laplace et on obtient les mêmes lois de paroi à l'ordre un et deux par un simple changement de variables. Dans les prochains paragraphes, on étend l'approche aux problèmes de Stokes, en utilisant la même stratégie pour développer de nouvelles lois de paroi à l'ordre un et deux.

4 Analyse d'erreur pour les équations de Stokes

4.1 Notations et résultats préliminaires

Soit $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ la solution du problème de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\nu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon & = & \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon & = & \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_b, \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_\infty, \\ \mathbf{u}^\varepsilon & = & \text{périodique} \end{array} \right. \quad (25)$$

avec \mathbf{f} "suffisamment régulière", dont le support est strictement inclu dans Ω_0 .

L'approximation de la solution exacte dans le domaine global est donnée par les fonctions $(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), p_0(\mathbf{x})) = ((u_0^t(\mathbf{x}), u_0^n(\mathbf{x})), p_0(\mathbf{x}))$, solution d'un problème de Stokes du type

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\nu \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 & = & \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 & = & \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_0, \\ \mathbf{u}_0 + \mathbf{F} \left(\langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}, \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu} \mathbf{n} \right), \dots, \langle \chi^{i-1} \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}, \frac{\partial^i \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}^i}, \frac{\partial^i \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n} \partial^{i-1} \mathbf{s}}, \right. \\ \left. \frac{\partial^{i-1} p_0}{\partial \mathbf{s}^{i-1}}, \dots, \langle \chi^{k-1} \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}, \frac{\partial^k \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n} \partial^{k-1} \mathbf{s}}, \frac{\partial^k \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}^k}, \frac{\partial^{k-1} p_0}{\partial \mathbf{s}^{k-1}} \right) & = & \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \end{array} \right. \quad (26)$$

où

- k est l'ordre de l'approximation,
- les fonctions $(\chi^i(\mathbf{y}), \rho^i(\mathbf{y}))$ sont des correcteurs solutions des problèmes de Stokes du type

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\nu \Delta_{\mathbf{y}} \chi^i + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^i & = & \mathbf{f}_i(\chi^0, \dots, \chi^{i-1}, \nabla_{\mathbf{y}} \chi^{i-1}, \rho^{i-1}) \text{ dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^i & = & \mathbf{g}_i(\chi^0, \dots, \chi^{i-1}) \text{ dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^i & = & \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \chi^i}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^i}{\nu} \mathbf{n} & = & \mathbf{h}_i(y_2) \text{ sur } \Gamma_{\text{sup}}, \\ (\chi^i, \rho^i) & & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \quad (27)$$

- les solutions des problèmes de cellule sont écrites sous forme matricielle :

$$\chi^i = \{\chi_t^i, \chi_n^i\} = \begin{bmatrix} \chi_{tt}^i & \chi_{nt}^i \\ \chi_{tn}^i & \chi_{nn}^i \end{bmatrix}$$

et

$$\rho^i = \begin{bmatrix} \rho_t^i \\ \rho_n^i \end{bmatrix},$$

- par $\langle \chi^i \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|}$ on désigne la moyenne de χ^i sur Γ_{sup} ,

$$\langle \chi^i \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} = \left\{ \langle \chi_t^i \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|}, \langle \chi_n^i \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} \right\} = \frac{1}{|\Gamma_{\text{sup}}|} \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi_{tt}^i ds & \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi_{nt}^i ds \\ \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi_{tn}^i ds & \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi_{nn}^i ds \end{bmatrix}.$$

Dans le domaine local Ω_{loc}^ε l'approximation est faite par les fonctions $(\mathbf{u}_{loc}(\mathbf{x}), p_{loc}(\mathbf{x})) = ((u_{loc}^t(\mathbf{x}), u_{loc}^n(\mathbf{x})), p_{loc}(\mathbf{x}))$ définies par

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{loc} = \mathbf{G} \left(\chi^0, \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - p_0 \mathbf{n} \right)_{\Gamma_0}, \dots, \chi^{i-1}, \frac{\partial^i \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}^i} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^i \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n} \partial^{i-1} \mathbf{s}} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^{i-1} p_0}{\partial \mathbf{s}^{i-1}} |_{\Gamma_0}, \right. \\ \quad \left. \dots, \chi^{k-1}, \frac{\partial^k \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}^k} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^k \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n} \partial^{k-1} \mathbf{s}} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^{k-1} p_0}{\partial \mathbf{s}^{k-1}} |_{\Gamma_0} \right), \\ p_{loc} = \mathbf{H} \left(\chi^0, \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - p_0 \mathbf{n} \right)_{\Gamma_0}, \dots, \chi^{i-1}, \frac{\partial^i \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}^i} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^i \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n} \partial^{i-1} \mathbf{s}} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^{i-1} p_0}{\partial \mathbf{s}^{i-1}} |_{\Gamma_0}, \right. \\ \quad \left. \dots, \chi^{k-1}, \frac{\partial^k \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}^k} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^k \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n} \partial^{k-1} \mathbf{s}} |_{\Gamma_0}, \frac{\partial^{k-1} p_0}{\partial \mathbf{s}^{k-1}} |_{\Gamma_0} \right) \end{cases}$$

Remarque 8 :

Les fonctionnelles linéaires \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{f}_i , \mathbf{g}_i et \mathbf{h}_i seront définies ultérieurement pour les ordres 1 et 2.

Soient $(\mathbf{e}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}))$ définies par $(\mathbf{e}, q) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^\varepsilon, p - p^\varepsilon)$ avec

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ \mathbf{u}_{loc}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{loc}^\varepsilon \end{cases}$$

et

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0, \\ p_{loc}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{loc}^\varepsilon. \end{cases}$$

L'analyse d'erreur des lois de paroi pour Stokes est basée sur les résultats suivants :

Lemme 5

Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et Γ une interface séparant Ω en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+ . Soient (\mathbf{e}, q) les fonctions satisfaisant $-\nu\Delta\mathbf{e} + \nabla q = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$ dans $\Omega^- \cup \Omega^+$ et $\mathbf{e} = 0$ sur $\partial\Omega^- \setminus \Gamma$ et $\partial\Omega^+ \setminus \Gamma$. Alors si $[\mathbf{e}]$ représente le saut de \mathbf{e} sur Γ ,

$$|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega} \leq C \left(\|[\mathbf{e}]\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \nu \left\| \left[\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{q}{\nu} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}\mathbf{n}} \right)$$

Démonstration :

$$\text{Soit } \mathbf{W}(\Omega) = \left\{ \mathbf{w} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \mathbf{w}|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = \mathbf{0} \right\}.$$

Par la formule de Green dans Ω^- et Ω^+ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} \left(-\Delta \mathbf{e} + \frac{1}{\nu} \nabla q \right) \mathbf{w} &= \int_{\Omega^+} \nabla \mathbf{e} \nabla \mathbf{w} \, ds + \int_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right) \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}(\Omega^+), \\ \int_{\Omega^-} \left(-\Delta \mathbf{e} + \frac{1}{\nu} \nabla q \right) \mathbf{w} &= \int_{\Omega^-} \nabla \mathbf{e} \nabla \mathbf{w} \, ds + \int_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right) \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}(\Omega^-). \end{aligned}$$

On additionne les deux expressions, en prenant pour \mathbf{n} la normale sortante à Ω^+

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla \mathbf{e} \nabla \mathbf{w} + \int_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e}^+ - \frac{1}{\nu} q^+ \mathbf{n} \right) \mathbf{w}^+ - \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e}^- - \frac{1}{\nu} q^- \mathbf{n} \right) \mathbf{w}^- = 0$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla \mathbf{e} \nabla \mathbf{w} &= \int_{\Gamma} \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e}^- - \frac{1}{\nu} q^- \mathbf{n} \right) \mathbf{w}^- - \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e}^+ - \frac{1}{\nu} q^+ \mathbf{n} \right) \mathbf{w}^+ \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left(\left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^+ + \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^- \right) (\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^+ - \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^- \right) (\mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\nabla \mathbf{e})^2 &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left(\left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^+ + \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^- \right) (\mathbf{e}^+ - \mathbf{e}^-) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^+ - \left(\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right)^- \right) (\mathbf{e}^+ + \mathbf{e}^-) \\ \Rightarrow |\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma}^2 &\leq C_1 \|[\mathbf{e}]\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \left(\left\| \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^+)/\mathbb{R}\mathbf{n}} + \left\| \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^-)/\mathbb{R}\mathbf{n}} \right) + \\ &\quad + C_2 \left\| \left[\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}\mathbf{n}} \left(\|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^+ + \|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^- \right), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma}^2 + |\mathbf{e}|_{0,\Omega}^2 &\leq C_1 \|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \left(\left\| \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^+)/\mathbb{R}_{\mathbf{n}}} + \left\| \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^-)/\mathbb{R}_{\mathbf{n}}} \right) + \\ &+ C_2 \left\| \left[\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}_{\mathbf{n}}} \left(\|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^+ + \|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^- \right) \end{aligned}$$

Par un argument de dualité, on peut montrer que $\left\| \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^+)/\mathbb{R}_{\mathbf{n}}}$ est bornée par $C |\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega^+}$ et la même inégalité est valable pour Γ^- . On a aussi immédiatement que $\|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^+$ et $\|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^-$ sont bornées par $|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega}$ et le résultat suit.

□

Lemme 6

Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et Γ une interface séparant Ω en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+ . Soient \mathbf{h} une fonction vectorielle $\mathbf{h} \in (L^2(\Omega))^2$ et g une fonction scalaire $g \in L^2(\Omega)$, et soient (\mathbf{e}, q) les fonctions satisfaisant $-\nu \Delta \mathbf{e} + \nabla q = \mathbf{h}$, $\nabla \cdot \mathbf{e} = g$ dans $\Omega^- \cup \Omega^+$ et $\mathbf{e} = 0$ sur $\partial\Omega^- \setminus \Gamma$ et $\partial\Omega^+ \setminus \Gamma$. Alors si $[\mathbf{e}]$ représente le saut de \mathbf{e} sur Γ , on a

$$\int_{\Gamma} [\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}] = \int_{\Omega^+} g - \int_{\Omega^-} g$$

et on a l'estimation

$$|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\mathbf{h}\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \nu \left\| \left[\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{q}{\nu} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}_{\mathbf{n}}} \right)$$

Démonstration :

En intégrant $\nabla \cdot \mathbf{e} = g$ dans chaque sous domaine on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}] &= \int_{\Gamma} \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}^+ - \int_{\Gamma} \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}^- \\ &= \int_{\Omega^+} \nabla \cdot \mathbf{e} - \int_{\Omega^-} \nabla \cdot \mathbf{e} \\ &= \int_{\Omega^+} g - \int_{\Omega^-} g. \end{aligned}$$

Soient $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}$ et $q = \bar{q} + \tilde{q}$, avec $(\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{q})$ solution du problème de Stokes posée dans $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup \Gamma$

$$\begin{cases} -\nu \Delta \tilde{\mathbf{e}} + \nabla \tilde{q} = \mathbf{h} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{e}} = g & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et $(\bar{\mathbf{e}}, \bar{q})$ solution du problème de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \bar{\mathbf{e}} + \nabla \frac{\bar{q}}{\nu} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{e}} = 0 & \text{dans } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega^- \setminus \Gamma \text{ et } \partial\Omega^+ \setminus \Gamma, \\ [\bar{\mathbf{e}}] = [\mathbf{e}] & \text{sur } \Gamma, \\ \left[\partial_{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{e}} - \frac{1}{\nu} \bar{q} \mathbf{n} \right] = \left[\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e} - \frac{1}{\nu} q \mathbf{n} \right] & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On a bien sûr

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{e}},$$

et l'identité analogue pour q .

Par la continuité par rapport aux données initiales

$$|\nabla \tilde{\mathbf{e}}|_{0,\Omega \setminus \Gamma} + |\tilde{\mathbf{e}}|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\mathbf{h}\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} \right)$$

et comme par le Lemme 5 on a

$$|\nabla \bar{\mathbf{e}}|_{0,\Omega \setminus \Gamma} + |\bar{\mathbf{e}}|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\bar{\mathbf{e}}\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \nu \left\| \left[\partial_{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{e}} - \frac{\bar{q}}{\nu} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}\mathbf{n}} \right)$$

le résultat suit.

□

4.2 Loi de paroi d'ordre 1

Soit $\nu = \nu_0 = Cte$ d'ordre un. Pour l'approximation au premier ordre, on définit (\mathbf{u}_0, p_0) solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{u}_0 + \varepsilon \langle \chi^0 \rangle \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (28)$$

Les fonctions $(\mathbf{u}_{loc}, p_{loc})$ sont définies dans Ω_{loc}^ε par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_{loc} = \varepsilon \chi^0 \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0}, \\ p_{loc} = \rho^0 \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0}, \end{array} \right. \quad (29)$$

où le correcteur χ^0 et sa pression associée ρ^0 sont les solutions du problème local

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^0 = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^0 = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^0 = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \chi^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{\nu_0} \rho^0 \mathbf{n} = \mathbf{I} & \text{sur } \Gamma_{sup}, \\ (\chi^0, \rho^0) & y_1 \text{ - périodique} \end{array} \right. \quad (30)$$

À partir des définitions (28)-(30) et $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$, $\left[\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \right] |_{\Gamma_0} = [\mathbf{u}^\varepsilon] |_{\Gamma_0} = [p^\varepsilon] |_{\Gamma_0} = 0$, les fonctions erreurs $(\mathbf{e}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}))$ satisfont

1.

$$\begin{aligned} -\nu_0 \Delta \mathbf{e} + \nabla q &= \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_0 \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^0) \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} - \rho_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + O(\varepsilon) \\ &= \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} - \rho_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + O(\varepsilon) \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon \end{aligned} \quad (31)$$

puisque par la condition d'incompressibilité et l'expression de la loi de paroi dans (28), $\frac{\partial^2 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} = \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} = O(\varepsilon)$,

2.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{e} &= 0, \text{ dans } \Omega_0 \\
&= \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^0 \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0} + O(\varepsilon) \\
&= -\varepsilon \chi_{tt}^0 \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon,
\end{aligned} \tag{32}$$

3.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right] |_{\Gamma_0} &= \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) - \left(\frac{\partial \chi^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \right) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{33}$$

4.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{e}] |_{\Gamma_0} &= \mathbf{u}_0 + \varepsilon \chi^0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \\
&= \varepsilon \left(\chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right)
\end{aligned} \tag{34}$$

Remarque 9:

La viscosité fixée à l'ordre un ne constitue pas une limitation. En effet, le problème de Stokes avec une viscosité quelconque peut être réécrit sous la forme (28) en redéfinissant la pression.

Remarque 10:

Le deuxième problème de cellule de (30) ne contribue pas à corriger les approximations. En effet, le problème de Stokes (30) avec la condition aux limites

$$\frac{\partial \chi_n^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho_n^0}{\nu_0} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sur Γ_{sup} a la solution triviale $\chi_n^0 = \mathbf{0}$ et $\rho_n^0 = -\nu_0$.

Remarque 11:

Par l'équation d'incompressibilité et les conditions aux limites du problème de cellule (30),

$$0 = \int_{\Omega_{loc}} \nabla \cdot \chi_t^0 d\Omega = \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi_t^0 \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Gamma_{\text{sup}}} \chi_{tn}^0 ds \Rightarrow \langle \chi_{tn}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} = 0.$$

Alors la loi de paroi d'ordre un peut être réécrite comme

$$\begin{cases} u_0^t + \varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u_0^n = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad (35)$$

Ce problème sera résolu dans la section 5.

Avant d'aborder les résultats sur la convergence, on a besoin des résultats préliminaires suivants :

Lemme 7

Si \mathbf{f} est de classe C^∞ à support compact inclu strictement dans Ω_0 , alors pour tout $m \geq 0$, $u_0^t|_{\Gamma_0}$ est borné dans la norme de $W^{m,\infty}(\Gamma_0)$ par

$$\|u_0^t\|_{W^{m,\infty}(\Gamma_0)} \leq \varepsilon C \|\mathbf{f}\|_{m,\Gamma_0}, \quad (36)$$

avec C une constante indépendante de ε .

Démonstration :

Par simplicité on considère $\nu_0 = 1$ et on suppose $\langle \chi_{tt}^0 \rangle \neq 0$ (le résultat est immédiat dans le cas contraire). La démonstration est similaire à celle du Lemme 2. Soit $H(\Omega_0)$ le sous-espace de $(H^1(\Omega_0))^2$ suivant

$$H(\Omega_0) = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega_0))^2 \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, v^n|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{v}|_{\Gamma_\infty} = 0 \text{ et périodique sur } \Gamma_{in} \text{ et } \Gamma_{out} \right\}.$$

On considère la formulation faible du problème de Stokes (28) avec (35) sur Γ_0 ,

$$\int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} + \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} u^t v^t = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\Omega_0).$$

En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0$ et comme par la continuité par rapport aux données initiales, $\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega_0} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega_0}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{\varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} u_0^t v^t &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \mathbf{v} - \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{v} \\ &\leq c \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega_0} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_0} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|u_0^t\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0} &= \sup_{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_0}=1} \int_{\Gamma_0} u_0^t v^t \\ &\leq \varepsilon C \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega_0}. \end{aligned}$$

et d'autre part directement que

$$\|u_0^t\|_{0,\Gamma_0} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

En dérivant les équations de (28) et (35) dans la variable x_1 , on obtient que les mêmes estimations sont valables pour $\frac{\partial^m u_0^t}{\partial x_1^m}$ pour m arbitraire.

D'autre part, pour $m \geq 1$, on a

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\partial^m u_0^t}{\partial x_1^m} = 0,$$

car u_0^t est périodique.

De l'inégalité de Poincaré-Wirtinger appliquée à $\frac{\partial^m u_0^t}{\partial x_1^m}|_{\Gamma_0}$, on déduit que

$$\left\| \frac{\partial^m u_0^t}{\partial x_1^m} \right\| \leq C\varepsilon.$$

Il ne reste qu'à obtenir l'estimation désirée pour u_0^t . Pour cela on prend une fonction test $\varphi \in H$, constante sur Γ_0 et on obtient que

$$\left| \int_{\Gamma_0} u_0^t \right| \leq C\varepsilon.$$

On conclut avec l'inégalité de Poincaré Wirtinger appliquée à u_0^t sur Γ_0 et l'estimation $\left\| \frac{\partial u_0^t}{\partial x_1} \right\|_{0,\Gamma_0} \leq C\varepsilon$.

On a donc démontré que $\forall m > 0$, m entier,

$$\|u_0^t\|_{W^{m,2}(\Gamma_0)} \leq C\varepsilon.$$

Pour conclure, on utilise la continuité des injections de Sobolev.

□

Remarque 12 :

Ce théorème implique que pour tout $m \geq 0$, $\frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0}$ est borné dans la norme de $W^{m,\infty}(\Gamma_0)$ par C où C est une constante indépendante de ε .

Lemme 8

L'erreur $\|\chi_{tt}^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_{tt}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{sup}}$ décroît exponentiellement vite vers 0 avec δ .

Démonstration: Voir paragraphe 4.4.

On a le théorème suivant

Théorème 3 (ordre 1)

L'erreur \mathbf{e} peut être estimée par

$$|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma_0} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon \delta^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration :

Le résultat provient du Lemme 6. Soient \mathbf{h} et g les termes de droite respectivement de (31) et (32),

$$|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma_0} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\mathbf{h}\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} + \|[\mathbf{e}]\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \left\| \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{R}\mathbf{n}} \right).$$

Alors on doit estimer les ordres de grandeur des termes $[\mathbf{e}]|_{\Gamma_0}$, $\left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right]|_{\Gamma_0}$, g et \mathbf{h} . Par le Lemme 7 les deux premiers sont immédiats et

$$\left\| \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{R}\mathbf{n}} = 0, \quad \|[\mathbf{e}]\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \leq C\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{\Gamma_{\text{sup}}} \right\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{\text{sup}}}.$$

Les erreurs g et \mathbf{h} ne sont pas suffisamment petites et on doit les corriger. On introduit de nouveaux correcteurs notés χ^1 et χ^2 avec leurs pressions associées ρ^1 et ρ^2 , les solutions des deux problèmes de cellule

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^1 = \begin{bmatrix} -\nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^1 = 0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^1 = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^1}{\nu_0} \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{\text{sup}}, \\ (\chi^1, \rho^1) & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^2 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^2 = \begin{bmatrix} -2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} + \rho_t^0 \\ -2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^2 = \chi_{tt}^0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^2 = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^2}{\nu_0} \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sup}, \\ (\chi^2, \rho^2) & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right.$$

On définit $\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) - \varepsilon^2 \left(\chi^2 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \chi^1 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \right)$ et $\tilde{q}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - \varepsilon \left(\rho^2 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \rho^1 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \right)$.

Alors par construction,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{e}} + \nabla \tilde{q} = O(\varepsilon) & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ -\nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{e}} + \nabla \tilde{q} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{e}} = O(\varepsilon^2) & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{e}} = 0 & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \|\tilde{\mathbf{e}}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_0} \leq \|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_0} + O(\varepsilon \delta^{\frac{1}{2}}), \\ \left\| \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\tilde{q}}{\nu_0} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{R}_{\mathbf{n}}} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

et par le Lemme 6

$$|\nabla \tilde{\mathbf{e}}|_{0, \Omega \setminus \Gamma} + |\tilde{\mathbf{e}}|_{0, \Omega} \leq C \left(\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \varepsilon \delta^{\frac{1}{2}} \right).$$

Finalement par l'inégalité triangulaire, en estimant les correcteurs supplémentaires et par le Lemme 8, on obtient le résultat désiré.

□

4.3 Loi de paroi d'ordre 2

Pour l'approximation au second ordre, on propose de définir $(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), p_0(\mathbf{x}))$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \mathbf{u}_0 + \varepsilon \langle \chi^0 \rangle \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p}{\nu_0} \mathbf{n} \right) + \varepsilon (\varepsilon \langle \chi^1 \rangle + \delta \langle \chi_t^0 \rangle) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} + \varepsilon^2 \langle \chi^2 \rangle \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (37)$$

Les fonctions $(\mathbf{u}_{loc}, p_{loc})$ sont définies dans Ω_{loc}^ε par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{loc} = \varepsilon \chi^0 \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0} + \varepsilon (\varepsilon \chi^1 + \delta \chi_t^0) \left(-\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} \right) |_{\Gamma_0} + \varepsilon^2 \chi^2 \left(-\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right), \\ p_{loc} = \rho^0 \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0} + (\varepsilon \rho^1 + \delta \rho_t^0) \left(-\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} \right) |_{\Gamma_0} + \varepsilon \rho^2 \left(-\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) \end{array} \right. \quad (38)$$

où les correcteurs χ^0 et ρ^0 sont définis précédemment, et où les correcteurs χ^1, χ^2 et leurs pressions associées ρ^1 et ρ^2 sont solutions des problèmes de cellule

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^1 &= \nu_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^1 &= 0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^1 &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^1}{\nu_0} \cdot \mathbf{n} &= - \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_{sup}, \\ (\chi^1, \rho^1) & & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \quad (39)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^2 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^2 = \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} - \rho_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^2 = -\chi_{tt}^0 \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^2 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^2}{\nu_0} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{sup}, \\ (\chi^2, \rho^2) \quad y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \quad (40)$$

Avant d'enoncer le théorème de convergence, on établit le résultat suivant :

Lemme 9

Les erreurs $\|\chi_t^1|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_t^1 \rangle|_{\Gamma_{sup}}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}}$, $\|\chi_t^2|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_t^2 \rangle|_{\Gamma_{sup}}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}}$ et $\|\chi_n^2|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_n^2 \rangle|_{\Gamma_{sup}}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}}$ décroissent exponentiellement vite vers 0 avec δ .

Démonstration: Voir paragraphe 4.4.

Alors d'après les définitions (37)-(40), les fonctions erreurs $(\mathbf{e}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}))$ satisfont

1.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e} &= \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_0 \\ &= \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^0 \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0} + \varepsilon \chi_{tt}^0 \left(-\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) \\ &\quad + \varepsilon \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^1 \left(-\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) + \delta \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi_t^0 \left(-\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) + \varepsilon \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^2 \left(-\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) \\ &\quad + O(\varepsilon^2 + \delta \varepsilon) \\ &= O(\varepsilon^2 + \delta \varepsilon) \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon \end{aligned} \quad (41)$$

2.

$$\begin{aligned}
-\nu_0 \Delta \mathbf{e} + \nabla q &= \mathbf{0}, \text{ dans } \Omega_0 \\
&= \frac{1}{\varepsilon} (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^0) \left(-\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_0} + \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} - \rho_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \left[\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^1) \left(-\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + \frac{\delta}{\varepsilon} (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi_t^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho_t^0) \left(-\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) \right. \\
&\quad \left. + (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^2 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^2) \left(-\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} \right) + \varepsilon \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_t^2}{\partial y_1} - \rho^2 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_n^2}{\partial y_1} \end{bmatrix} \frac{\partial^3 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_t^1}{\partial y_1} + 2\nu_0 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} - \rho^1 - \rho_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_n^1}{\partial y_1} + 2\nu_0 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \begin{bmatrix} -\nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^3 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} + O(\varepsilon^2 + \delta \varepsilon) \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon \right. \\
&= +\varepsilon \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_t^2}{\partial y_1} - \rho^2 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_n^2}{\partial y_1} \end{bmatrix} \frac{\partial^3 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} + \varepsilon \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \chi_t^1}{\partial y_1} + 2\nu_0 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} - \rho^1 - \rho_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \chi_n^1}{\partial y_1} + 2\nu_0 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \\
&\quad \frac{\partial^2 p_0}{\partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} + \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} |_{\Gamma_0} + O(\varepsilon^2 + \delta \varepsilon) \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon,
\end{aligned} \tag{42}$$

puisque par la condition d'incompressibilité et l'expression de la loi de paroi

$$\text{dans (28), } \frac{\partial^3 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} |_{\Gamma_0} = \frac{\partial^3 u_0^t}{\partial \mathbf{s}^3} |_{\Gamma_0} = O(\varepsilon),$$

3.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{e}]|_{\Gamma_0} &= \mathbf{u}_0 + \varepsilon \chi^0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) + \varepsilon^2 \chi^1 \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
&\quad + \varepsilon \delta \chi_t^0 \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon^2 \chi^2 \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
&= \varepsilon \left(\chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) + \varepsilon^2 \left(\chi^1 - \langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \\
&\quad + \varepsilon \delta \left(\chi_t^0 - \langle \chi_t^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon^2 \left(\chi^2 - \langle \chi^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}|} \right) \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0}
\end{aligned} \tag{43}$$

4.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right]|_{\Gamma_0} &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) - \left(\frac{\partial \chi_t^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{p_0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \\
&\quad - \varepsilon \left(\left(\frac{\partial \chi^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^1}{\nu_0} \mathbf{n} \right) + \frac{\delta}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \chi_t^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho_t^0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
&\quad - \varepsilon \left(\frac{\partial \chi^2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\rho^2}{\nu_0} \mathbf{n} \right) \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{44}$$

L'erreur d'approximation à l'ordre deux est la suivante

Théorème 4 (ordre 2)

L'erreur \mathbf{e} satisfait

$$|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma_0} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega} \leq C \left(\varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \delta^{\frac{3}{2}} \right) \tag{45}$$

Démonstration :

Le résultat suit par l'application du Lemme 6. Soient \mathbf{h} et g les termes de droite de (42) et (41) respectivement, alors

$$|\nabla \mathbf{e}|_{0,\Omega \setminus \Gamma_0} + |\mathbf{e}|_{0,\Omega} \leq C \left(\|\mathbf{h}\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} + \|[\mathbf{e}]\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} + \left\| \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{R}\mathbf{n}} \right).$$

On doit donc estimer l'ordre des termes $[\mathbf{e}]|_{\Gamma_0}$, $\left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right]|_{\Gamma_0}$, g et \mathbf{h} . Les trois premiers sont immédiats, en effet

$$\left\| \left[\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{q}{\nu_0} \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{R}\mathbf{n}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_0} &\leq C \left(\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{\text{sup}}} + \varepsilon \delta \left\| \chi_t^0 - \langle \chi_t^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{\text{sup}}} + \varepsilon^2 \left\| \chi^1 - \langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{\text{sup}}} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left\| \chi^2 - \langle \chi^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{\text{sup}}} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

et

$$\|g\|_{0, \Omega} = O\left(\varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \delta^{\frac{3}{2}}\right).$$

La norme de \mathbf{h} n'est pas suffisamment petite, et on doit donc corriger ce terme. On introduit trois nouveaux correcteurs notés γ , φ , et λ avec leurs pressions associées ψ , ω , et ϕ respectivement, solutions des problèmes de cellule

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \gamma + \nabla_{\mathbf{y}} \psi &= \begin{bmatrix} -\nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \gamma &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \gamma &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\psi}{\nu_0} \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{\text{sup}}, \\ (\gamma, \psi) & & y_1 - \text{périodique}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \varphi + \nabla_{\mathbf{y}} \omega &= \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial \chi_{tt}^2}{\partial y_1} + \rho_t^2 \\ -2 \frac{\partial \chi_{tn}^2}{\partial y_1} \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \varphi &= 0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \varphi &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\omega}{\nu_0} \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{\text{sup}}, \\ (\varphi, \omega) & & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \lambda + \nabla_{\mathbf{y}} \phi = \begin{bmatrix} -2\nu_0 \frac{\partial \chi_t^1}{\partial y_1} - 2\nu_0 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} + \rho^1 + \rho_t^0 \\ -2\nu_0 \frac{\partial \chi_n^1}{\partial y_1} - 2\nu_0 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{\partial \chi_{tn}^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \lambda = 0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \lambda = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\phi}{\nu_0} \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{sup} \\ (\lambda, \phi) & y_1 \text{ - p\'eriodique.} \end{array} \right.$$

On d\'efinit $\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) - \varepsilon^2 \gamma \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^3 \varphi \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^3 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^3 \lambda \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0}$
et $\tilde{q}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - \varepsilon \psi \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0^n}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^3 \omega \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^3 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^3 \phi \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0}$.

Alors par construction,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{e}} + \nabla \tilde{q} = O(\varepsilon^2 + \delta \varepsilon) & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ -\nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{e}} + \nabla \tilde{q} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{e}} = O(\varepsilon^2 + \delta \varepsilon) & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{e}} = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \|\tilde{\mathbf{e}}\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_0} \leq \|[\mathbf{e}]\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_0} + O(\varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}}), \\ \left\| \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\tilde{q}}{\nu_0} \cdot \mathbf{n} \right] \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{R}\mathbf{n}} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

et par le Lemme 6

$$|\nabla \tilde{\mathbf{e}}|_{0, \Omega \setminus \Gamma} + |\tilde{\mathbf{e}}|_{0, \Omega} \leq C \left(\varepsilon \left\| \chi^0 - \langle \chi^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \varepsilon \delta \left\| \chi_t^0 - \langle \chi_t^0 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \varepsilon^2 \left\| \chi^1 - \langle \chi^1 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \varepsilon^2 \left\| \chi^2 - \langle \chi^2 \rangle_{|\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \varepsilon^2 \delta^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \delta^{\frac{3}{2}} \right)$$

Finalement par l'in\'egalit\'e triangulaire et par les Lemmes 8 et 9, on arrive au r\'esultat d\'esir\'e.

□

Remarque 13 :

La loi de paroi d'ordre deux peut être réécrite

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t + \varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon \left(\varepsilon \langle \chi_t^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} + \delta \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} \\ \quad + \varepsilon^2 \langle \chi_t^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ u_0^n + \varepsilon^2 \langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (47)$$

puisque $\langle \chi_{tn}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = \langle \chi_n^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = 0$ en raison de la contrainte d'incompressibilité et des conditions aux limites imposées dans les problèmes de cellules (30) et (39). De plus, la constante $\langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}$ peut être calculée *a priori* par

$$\langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -\frac{1}{|\Gamma_{\text{sup}}|} \int_{\Omega_{loc}} \chi_{tt}^0. \quad (48)$$

Remarque 14 :

On peut écrire une autre loi à l'ordre deux en remarquant que, en dérivant la loi de paroi d'ordre un (5) par rapport à \mathbf{s} , on obtient

$$\frac{\partial^2 u_0^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} = -\frac{1}{\varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{s}} + O(\varepsilon + \delta) \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (49)$$

Par la condition d'incompressibilité et en substituant (49) dans (47), on obtient une nouvelle loi de paroi d'ordre deux sur Γ_0 qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t + \varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon \left(\varepsilon \langle \chi_t^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} + \delta \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} \\ \quad - \varepsilon \frac{\langle \chi_t^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}}{\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ u_0^n - \varepsilon \frac{\langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}}{\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (50)$$

Cette loi ne porte que sur les dérivées premières, ce qui facilite son implémentation numérique. Les deux lois sont différentes, mais les solutions des problèmes globaux correspondants diffèrent par une erreur d'ordre inférieur à deux. Ce problème sera résolu dans la section 5.

Remarque 15 :

Dans le cas particulier de la plaque plane, les constantes d'homogénéisation sont données analytiquement par

$$\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad \langle \chi_t^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -\frac{\delta^2}{2\varepsilon^2}, \quad \langle \chi_t^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = 0 \quad \text{et} \quad \langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -\frac{\delta^2}{2\varepsilon^2}.$$

Alors la loi de paroi d'ordre deux pour la plaque plane s'écrit simplement comme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t + \delta \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\delta^2}{2\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ u_0^n + \frac{\delta}{2} \frac{\partial u_0^n}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (51)$$

4.4 Équivalence entre M.D.A. et M.D.D

Les lois de paroi obtenues par développement asymptotique (domaine figure 2) sont comparées à celles obtenues par M.D.A. À l'ordre un, la loi de paroi par M.D.A. est donnée par (voir [6] et [4] pour la stratégie)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t = \varepsilon C_0 \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{sur } \Gamma_m, \\ u_0^n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right. \quad (52)$$

et à l'ordre deux par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t = \varepsilon C_0 \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon^2 \frac{C_1}{\nu_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} - \varepsilon \frac{C_{21}}{C_0} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{s}} \quad \text{sur } \Gamma_m, \\ u_0^n = -\varepsilon^2 \frac{C_{22}}{C_0} \frac{\partial u_0^n}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{sur } \Gamma_m \end{array} \right. \quad (53)$$

avec C_0 , C_1 et (C_{21}, C_{22}) les uniques constantes telles que les problèmes de cellules

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\rho}^0 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\chi}^0 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{dans } C_\varepsilon, \\ \text{dans } C_\varepsilon, \end{array} \\ \\ \bar{\chi}^0 = \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \bar{\chi}^0 = \begin{bmatrix} C_0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{exponentiellement,} \\ \\ (\bar{\chi}^0, \bar{\rho}^0) & y_1 - \text{périodique,} \end{array} \right. \quad (54)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^1 + \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\rho}^1 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\chi}^1 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{dans } C_\varepsilon, \\ \text{dans } C_\varepsilon, \end{array} \\ \\ \bar{\chi}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{y_2^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \bar{\chi}^1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{exponentiellement,} \\ \\ (\bar{\chi}^1, \bar{\rho}^1) & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \quad (55)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^2 + \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\rho}^2 = \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \bar{\chi}_t^0}{\partial y_1} - \bar{\rho}_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \bar{\chi}_n^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} & \text{dans } C_\varepsilon, \\ \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\chi}^2 = -\bar{\chi}_{tt}^0 + C_0 & \text{dans } C_\varepsilon, \\ \\ \bar{\chi}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{y_2^2}{2} + C_0 y_2 \end{bmatrix} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \bar{\chi}^2 = \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} & \text{exponentiellement,} \\ \\ (\bar{\chi}^2, \bar{\rho}^2) & y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \quad (56)$$

aient des solutions uniques.

L'équivalence entre les méthodes M.D.D. et M.D.A. est faite de façon analogue à celle effectuée pour l'équation de Laplace. Avec le changement de variables suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\chi}_t^0 = -\bar{\chi}^0 + \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\chi}^1 = -\bar{\chi}^1 - \begin{bmatrix} \frac{y_2^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\chi}^2 = -\bar{\chi}^2 - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_2^2}{2} - C_0 y_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_t^0 = -\bar{\rho}^0 \\ \tilde{\rho}^1 = -\bar{\rho}^1 \\ \tilde{\rho}^2 = -\bar{\rho}^2 - \begin{bmatrix} 0 \\ \nu_0 (y_2 + C_0) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

on montre l'équivalence entre les problèmes locaux de deux méthodes. En effet,

$$\begin{aligned} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\chi}_t^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\rho}_t^0 &= \nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^0 - \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\rho}^0 &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\chi}_t^0 &= -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\chi}^0 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \tilde{\chi}_t^0|_{\Gamma_\varepsilon} &= -\bar{\chi}^0|_{\Gamma_\varepsilon} + \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_t^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\tilde{\rho}_t^0}{\nu_0} \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_{\text{sup}}} &= - \left(\frac{\partial \bar{\chi}^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\bar{\rho}^0}{\nu_0} \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_{\text{sup}}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ (\tilde{\chi}_t^0, \tilde{\rho}_t^0) \quad y_1 - \text{périodique} &\Leftrightarrow (\bar{\chi}^0, \bar{\rho}^0) \quad y_1 - \text{périodique}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\chi}^1 + \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\rho}^1 &= \nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^1 - \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\rho}^1 - \nu_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nu_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\chi}^1 &= -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\chi}^1 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \tilde{\chi}^1|_{\Gamma_\varepsilon} &= -\bar{\chi}^1|_{\Gamma_\varepsilon} - \begin{bmatrix} \frac{y_2^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \left(\frac{\partial \tilde{\chi}^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\tilde{\rho}^1}{\nu_0} \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_{\text{sup}}} &= - \left(\frac{\partial \bar{\chi}^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\bar{\rho}^1}{\nu_0} \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_{\text{sup}}} - \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ (\tilde{\chi}^1, \tilde{\rho}^1) \quad y_1 - \text{périodique} &\Leftrightarrow (\bar{\chi}^1, \bar{\rho}^1) \quad y_1 - \text{périodique} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\chi}^2 + \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\rho}^2 &= \nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \bar{\chi}^2 - \nabla_{\mathbf{y}} \bar{\rho}^2 &= \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \bar{\chi}_t^0}{\partial y_1} - \bar{\rho}_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \bar{\chi}_n^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2\nu_0 \frac{\partial \tilde{\chi}_t^0}{\partial y_1} - \tilde{\rho}_t^0 \\ 2\nu_0 \frac{\partial \tilde{\chi}_n^0}{\partial y_1} \end{bmatrix} &\text{dans } \Omega_{loc}, \\
 \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\chi}^2 &= -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\chi}^2 = \bar{\chi}_t^0 - y_2 &= -\tilde{\chi}_t^0 &\text{dans } \Omega_{loc}, \\
 \tilde{\chi}^2|_{\Gamma_\epsilon} &= -\bar{\chi}^2|_{\Gamma_\epsilon} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_2^2}{2} - C_0 y_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \\
 \left(\frac{\partial \tilde{\chi}^2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\tilde{\rho}^2}{\nu_0} \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_{sup}} &= - \left(\frac{\partial \bar{\chi}^2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\bar{\rho}^2}{\nu_0} \mathbf{n} \right)|_{\Gamma_{sup}}, \\
 (\tilde{\chi}^2, \tilde{\rho}^2) \text{ } y_1\text{-périodique} &\Leftrightarrow (\bar{\chi}^2, \bar{\rho}^2) \text{ } y_1\text{-périodique.}
 \end{aligned}$$

Mais $\left| \left(\frac{\partial \bar{\chi}_t^0}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\bar{\rho}^0}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_{sup}} \right|$, $\left| \left(\frac{\partial \bar{\chi}^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\bar{\rho}^1}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_{sup}} \right|$ et $\left| \left(\frac{\partial \bar{\chi}^2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\bar{\rho}^2}{\nu_0} \mathbf{n} \right) |_{\Gamma_{sup}} \right|$ tendent exponentiellement vite vers 0 avec δ . Alors quand δ tend vers l'infini, $(\tilde{\chi}_t^0, \tilde{\rho}_t^0)$, $(\tilde{\chi}^1, \tilde{\rho}^1)$ et $(\tilde{\chi}^2, \tilde{\rho}^2)$ tendent exponentiellement vite vers (χ_t^0, ρ_t^0) , (χ^1, ρ^1) et (χ^2, ρ^2) , respectivement. De ce fait,

$$\begin{aligned}
 \left\| \chi_{tt}^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_{tt}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} &\approx \left\| \tilde{\chi}_{tt}^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \tilde{\chi}_{tt}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \\
 &= \left\| \bar{\chi}_{tt}^0|_{\Gamma_{sup}} - \langle \bar{\chi}_{tt}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \\
 &\leq \left\| \bar{\chi}_{tt}^0|_{\Gamma_{sup}} - C_0 \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} + \left| C_0 - \langle \bar{\chi}_{tt}^0 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{57}$$

exponentiellement avec δ .

Remarque 16 :

De façon analogue, $\left\| \chi_t^1|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_t^1 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \rightarrow 0$, $\left\| \chi_t^2|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_t^2 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \rightarrow 0$ et $\left\| \chi_n^2|_{\Gamma_{sup}} - \langle \chi_n^2 \rangle|_{\Gamma_{sup}} \right\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_{sup}} \rightarrow 0$, exponentiellement avec δ .

On remarque que la loi de paroi (50) posée sur Γ_0 peut se déduire de (53) posée sur Γ_m . En effet, si (\mathbf{u}_0, p_0) est solution de (37), par un développement de Taylor on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t + \varepsilon \left(\frac{\delta}{\varepsilon} - C_0 \right) \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon^2 \left(-C_1 - \frac{\delta}{\varepsilon} C_0 + \frac{\delta^2}{2\varepsilon^2} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} + \varepsilon \frac{C_{21}}{\left(\frac{\delta}{\varepsilon} - C_0 \right)} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \\ u_0^n + \varepsilon \frac{\left(C_{22} - C_0 \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\delta^2}{2\varepsilon^2} \right)}{\left(\frac{\delta}{\varepsilon} - C_0 \right)} \frac{\partial u_0^n}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

\Leftrightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^t + \varepsilon \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon \left(\varepsilon \langle \chi_t^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} + \delta \langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} \right) \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{s}} - \varepsilon \frac{\langle \chi_t^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}}{\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} \frac{\partial u_0^t}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \\ u_0^n - \varepsilon \frac{\langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}}{\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}}} \frac{\partial u_0^n}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

en négligeant les termes d'ordre ε^3 .

5 Validations numériques

On présente trois problèmes de Stokes sur des domaines contenant des rugosités de géométries différentes. L'objectif est d'étudier l'amélioration apportée par les lois de paroi d'ordre élevé et leurs précisions par rapport au calcul direct.

Les validations sont effectuées par comparaison entre le calcul direct sur le domaine rugueux original, le calcul avec la loi d'ordre zéro où la partie rugueuse du domaine est remplacée par une surface moyennée plane et un calcul avec les lois de paroi d'ordre un et deux sur un domaine sans rugosités, à une hauteur δ .

Dans le premier problème, on valide l'approche pour l'équation de Stokes avec la viscosité d'ordre un. Dans les deux problèmes de Stokes suivants, la viscosité est fixée de l'ordre de ε , avec ε pris comme la hauteur de la rugosité. Les comparaisons sont faites à partir des lignes de courants de la vitesse, des isovaleurs de la pression et par des coupes à $x_2 = Cte$ de la vitesse, pression et frottement ($C_f = \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}$).

Une fois le paramètre ε fixé en fonction de la géométrie de la rugosité, on construit les lois de paroi de la façon suivante :

- i) on choisit une hauteur $\delta \approx \varepsilon$ de la paroi,
- ii) on résout un ou trois problèmes de Stokes dans la cellule Ω_{loc} (en fonction de l'ordre de l'approximation) avec une viscosité d'ordre un,
- iii) on calcule la moyenne de la vitesse tangentielle à la hauteur $y_2 = \frac{\delta}{\varepsilon}$,
- iv) on introduit les constantes dans les lois de paroi et on les impose à la hauteur $x_2 = \delta$ au-dessus de la paroi.

5.1 Plaque plane avec rugosités rectangulaires

Dans ce paragraphe, on poursuit l'étude de la loi de paroi d'ordre un pour les équations de Stokes avec viscosité d'ordre un. Le domaine est constitué d'une plaque plane suivie d'une plaque rugueuse avec des rugosités rectangulaires. Les caractéristiques du problème sont les suivantes :

- $Re = 5$,
- $\mathbf{u} = (1, 0)$ à l'entrée, $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ et $u^n = 0$ à l'infini et Neumann homogène à la sortie.
- Les conditions du calcul direct sont :
 - Condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 0.1] \times [0, 1.5]$, plaque rugueuse $[0.1, 1] \times [0, 1.5]$,

- 12 rugosités rectangulaires de dimensions $[0, 0.075] \times [0, 0.025]$,
- 11000 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - Condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 1] \times [0, 1.5]$,
 - 2900 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un sont :
 - Loi de paroi d'ordre un ou deux à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 1] \times [0, 1.5]$, plaque rugueuse $[0.1, 1] \times [0, 1.5]$,
 - 2900 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques du problème de cellule sont

- $Re = 5$,
- $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi, condition de y_1 -périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 1$ et $u^n = 0$ à l'infini,
- Domaine : $[0, 3] \times [0, 2]$ avec rugosité de dimensions $[0, 0.5] \times [0, 1]$,
- 2500 éléments Q1-Q1.

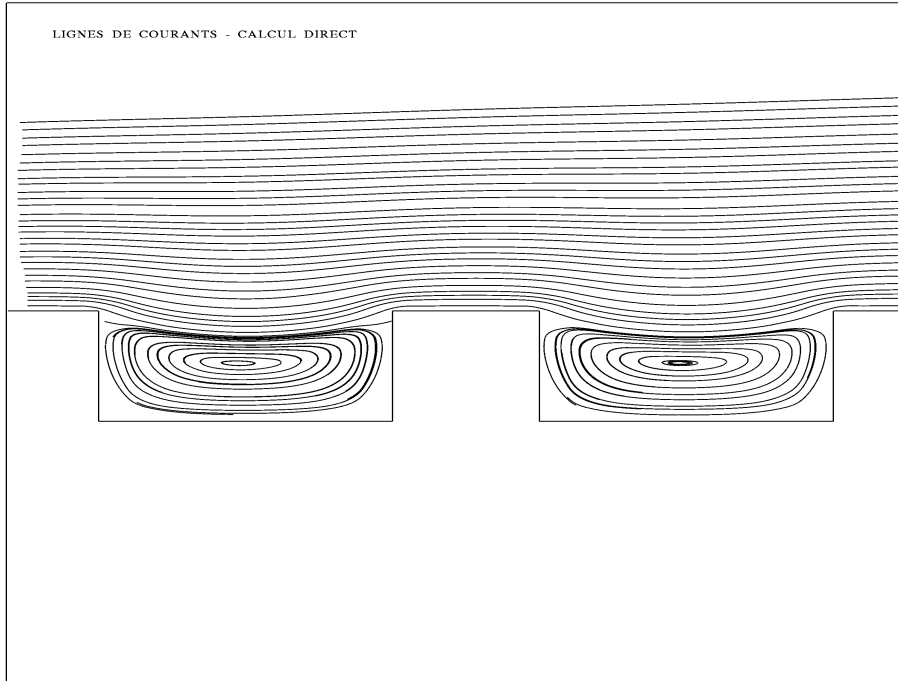


FIG. 3: *Zoom des lignes de courants sur deux rugosités rectangulaires.*

Le paramètre ε est fixé à 0.025 et on impose la loi de paroi d'ordre un à $\delta = 0.001$. On résout le problème de Stokes dans la cellule Ω_{loc} et on calcule la moyenne de la vitesse tangentielle à la hauteur $y_2 = 0.4$ (figure 4). La valeur de la constante d'homogénéisation pour la partie rugueuse est

$$\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{0, \Gamma_{sup}} = 1.333$$

et pour la partie plane $\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{0, \Gamma_{sup}} = 0.4$.

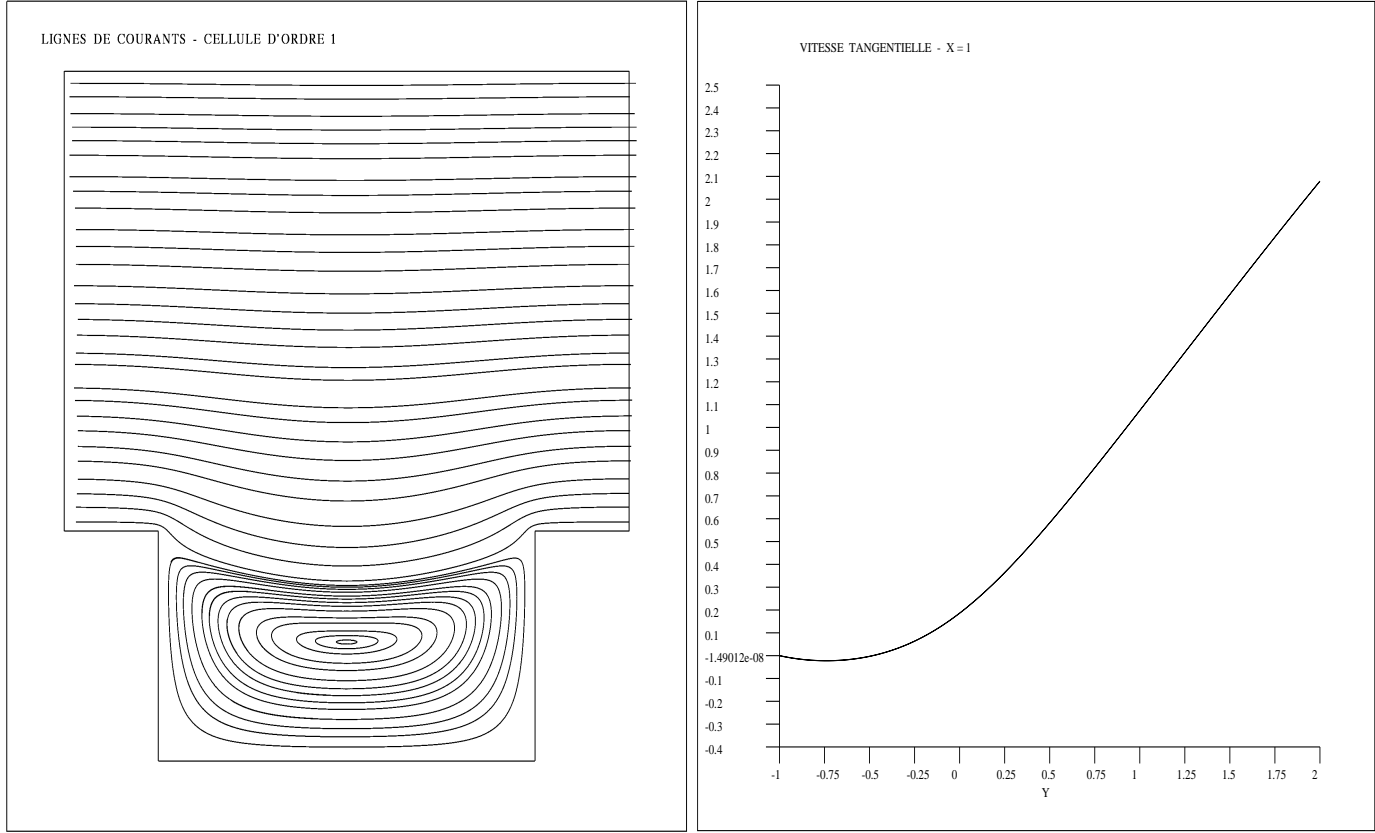


FIG. 4: *Lignes de courants du problème de cellule d'ordre un (à gauche) reproduisant celles obtenues par un calcul direct. À droite, le profil de u_1^t à $y_1 = 1$ linéaire au-dessus de la rugosité, en accord avec l'expérience.*

Le coefficient de friction et la pression ne sont pas influencés de façon significative par les rugosités (figure 5). En contrepartie, les dimensions des rugosités placées en dessous de la partie plane, influencent le champ de vitesse et le translatent vers le bas. L'introduction de la loi de paroi d'ordre un agit en affaiblissant le décalage du profil de vitesse (figure 6).

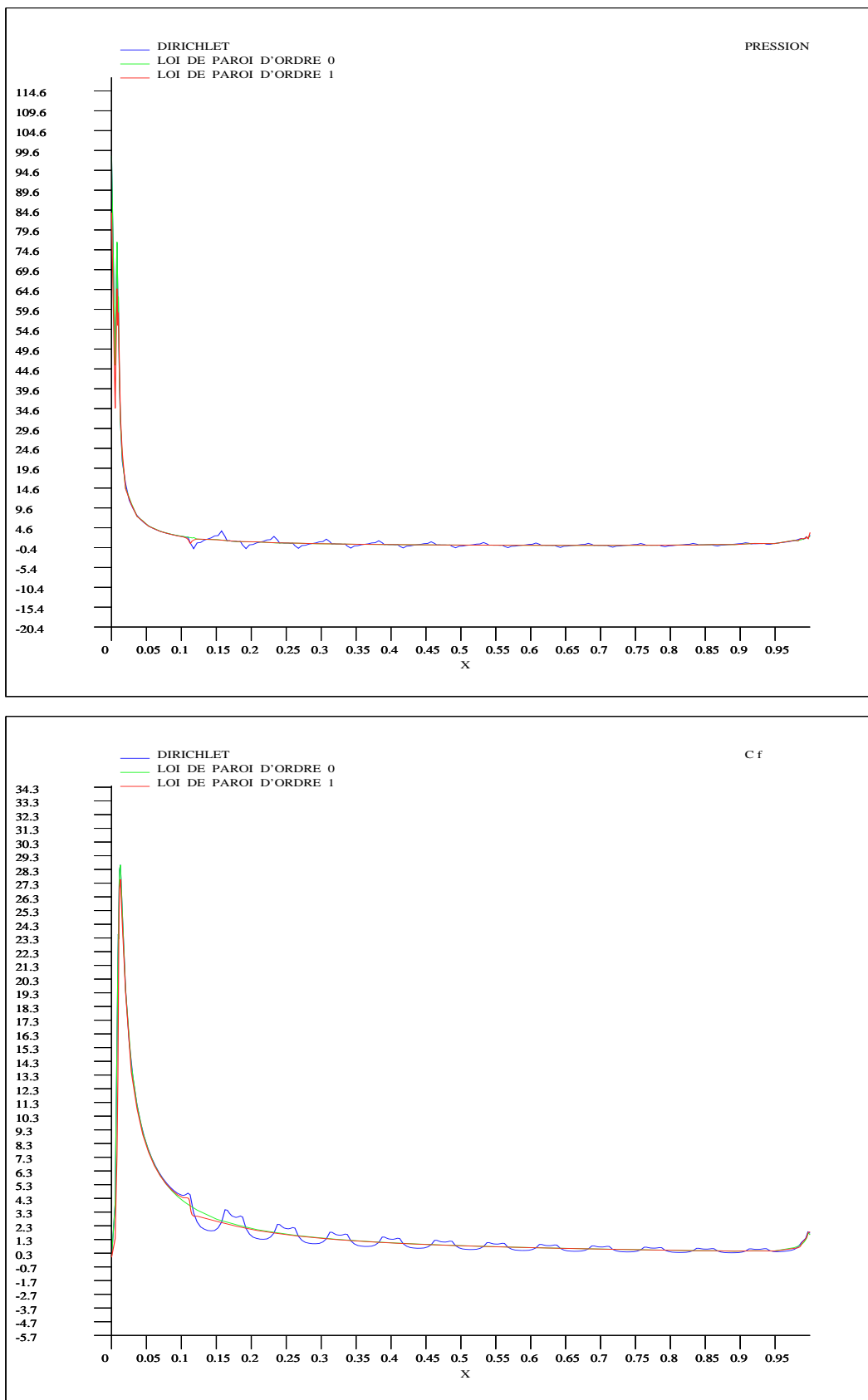


FIG. 5: Comparaison entre la pression et le coefficient de friction à $\delta = 0.0025$. Les profils avec la loi de paroi d'ordre un sont semblables à ceux obtenus à l'ordre zéro.

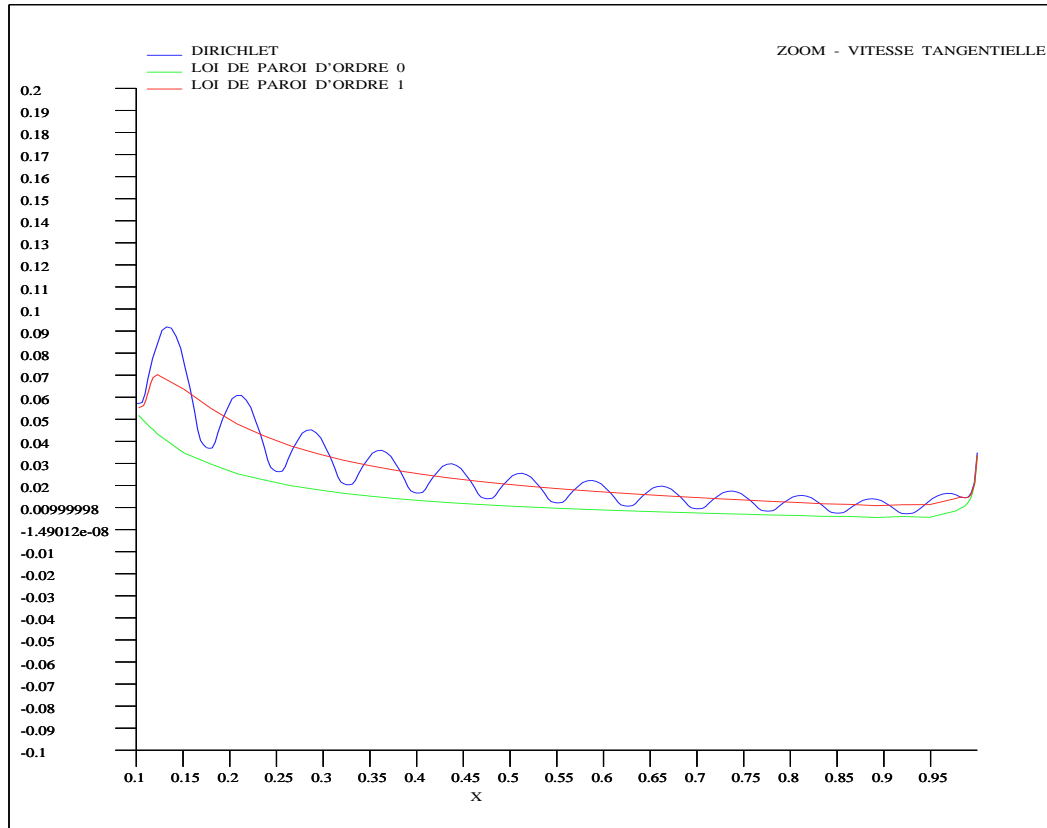
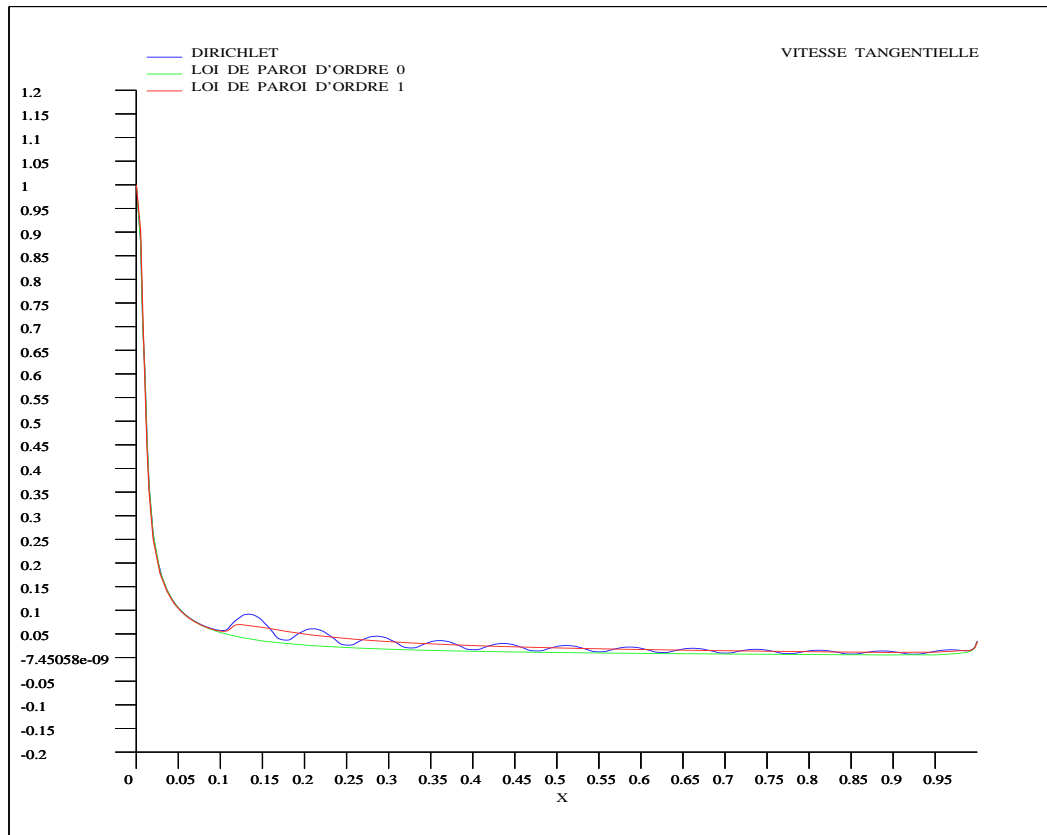


FIG. 6: Comparaison entre les profils de vitesses à $\delta = 0.0025$. La rugosité décale le profil de vitesse vers le bas. La loi de paroi d'ordre un récupère ce décalage et approche mieux en moyenne le profil de vitesse obtenu par le calcul direct.

5.2 Canal rugueux

La viscosité est fixée à l'ordre de la dimension de la rugosité. Le deuxième cas test est constitué par un canal avec, à la frontière inférieure une plaque plane, suivie d'une plaque rugueuse constituée de rugosités de géométries différentes. La première partie rugueuse est constituée de rugosités non-symétriques et la deuxième par des rugosités sinusoïdales. Les objectifs de ce cas test sont :

- i) montrer la flexibilité de l'approche pour traiter des domaines contenant différentes formes de rugosités,
- ii) étudier l'apport de la loi de paroi d'ordre deux en présence d'un gradient de pression plus important et
- iii) vérifier que les lois de parois peuvent simuler correctement la zone de transition entre les différentes plaques.

Les caractéristiques de l'écoulement sont :

- $Re = 100$,
- un profil parabolique à l'entrée, à la frontière supérieure $\mathbf{u} = (0, 0)$ et $p = 0$ et $u^n = 0$ à la sortie.
- Les caractéristiques pour le calcul direct sont :
 - Condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : paroi inférieure plane $[0, 0.25] \times [0, 0.5]$, paroi avec rugosités non-symétriques $[0.25, 0.75] \times [0, 1.5]$, paroi avec rugosités sinusoïdales $[0.75, 1] \times [0, 1.5]$,
 - 10 rugosités non symétriques de dimensions $[0, 0.05] \times [0, 0.025]$ et 6 rugosités sinusoïdales de dimensions $[0, 0.04] \times [0, 0.01]$,
 - 12000 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - Condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 1] \times [0, 0.5]$,
 - 2500 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un et deux sont :
 - Loi de paroi d'ordre un ou deux à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 0.25] \times [0.025, 0.5]$, plaque rugueuse $[0.75, 1] \times [0.025, 0.5]$,
 - 2400 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques des problèmes de cellule avec rugosité non-symétrique sont :

- $Re = 2.5$,
- $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi, condition de y_1 -périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 1$ (où $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 3$ et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ à l'ordre deux) et $u^n = 0$ à l'infini,
- Domaine : $[0, 2] \times [0, 3]$ avec rugosité de dimensions $[0, 1] \times [0, 1]$,
- 1600 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques des problèmes de cellules avec rugosité symétrique sont :

- $Re = 2.5$,
- $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi, condition de y_1 -périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 1$ (où $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 3$ et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ à l'ordre deux) et $u^n = 0$ à l'infini,
- Domaine : $[0, 1.6] \times [0, 3]$ avec rugosité de dimensions $[0, 0.4] \times [0, 1.6]$
- 2500 éléments Q1-Q1

D'abord, on résout les problèmes de cellule associés aux différentes formes des rugosités (figures 7-12). On fixe le paramètre $\varepsilon = 0.025$ et on choisit dans un premier temps d'imposer les lois de parois à $\delta = 0.025$. Pour chaque type de rugosité, on résout trois problèmes de cellules associés à l'ordre un et deux. Pour la rugosité non-symétrique, on obtient les constantes d'homogénéisation

$$\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = 0.1588, \quad \langle \chi_t^1 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -0.1365, \quad \langle \chi_t^2 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -7.2 \times 10^{-5}$$

et

$$\langle \chi_n^2 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -2.2 \times 10^{-2}$$

Pour la rugosité sinusoïdale, les constantes sont

$$\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = 0.7, \quad \langle \chi_t^1 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -0.45, \quad \langle \chi_t^2 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = 1.83 \times 10^{-4}$$

et

$$\langle \chi_n^2 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -0.251$$

et pour la partie plaque plane $\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = 1$, $\langle \chi_t^1 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -0.5$, $\langle \chi_t^2 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = 0$ et $\langle \chi_n^2 \rangle_{0, \Gamma_{\text{sup}}} = -0.5$.

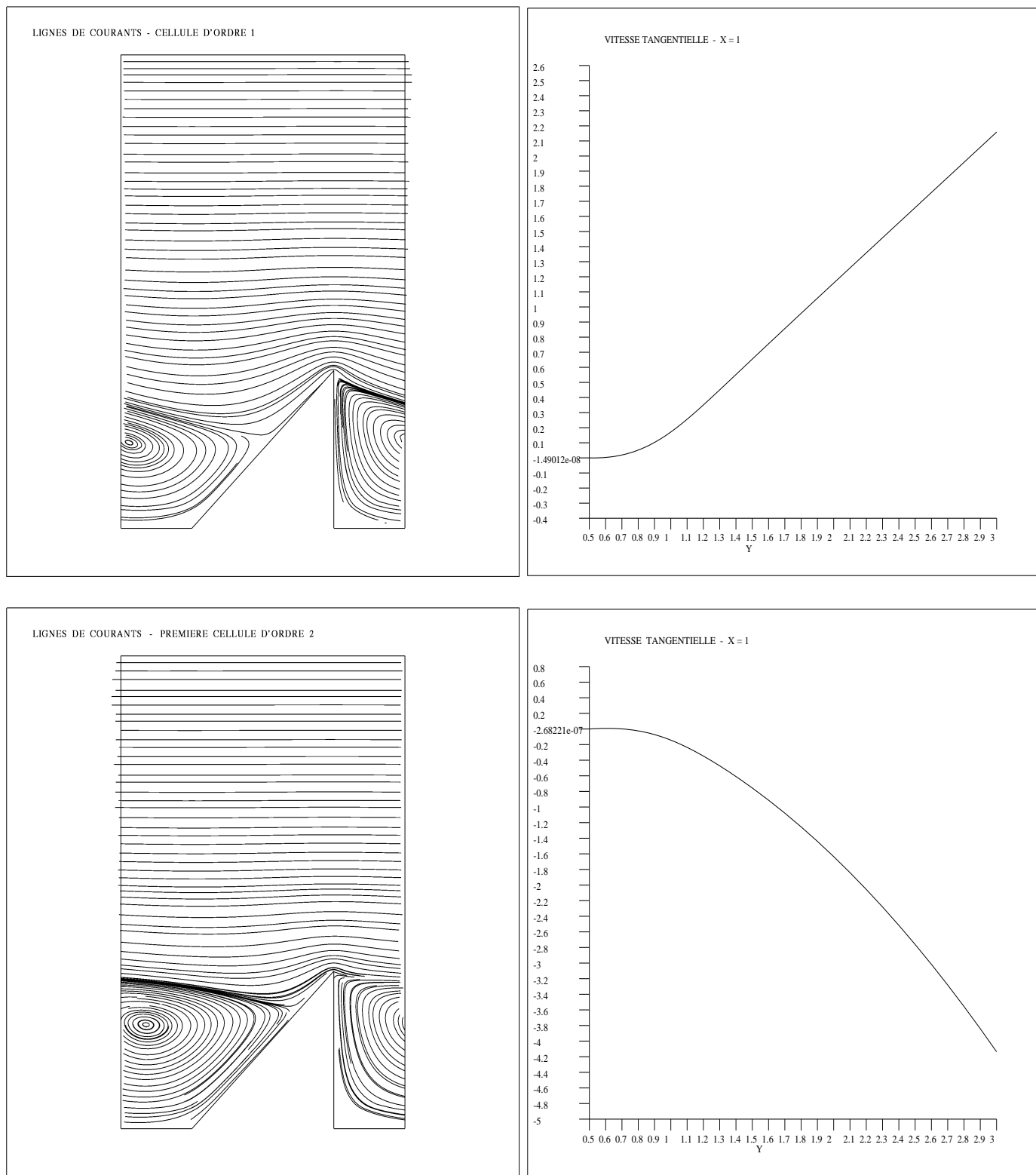


FIG. 7: Lignes de courant des problèmes de cellule d'ordre un et deux (à gauche) pour la rugosité non-symétrique. Les signes des constantes d'ordre un et deux sont opposés. Le profil de vitesse tangentielle d'ordre un est positif et linéaire au-dessus des rugosités, tandis qu'à l'ordre deux le profil est parabolique et la vitesse est négative (gauche).

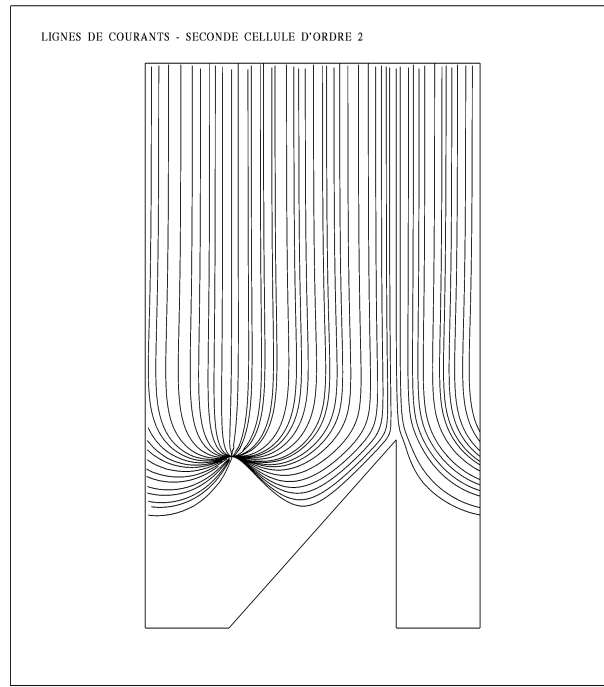


FIG. 8: *Lignes de courant du deuxième problème de cellule d'ordre deux pour la rugosité non-symétrique.*

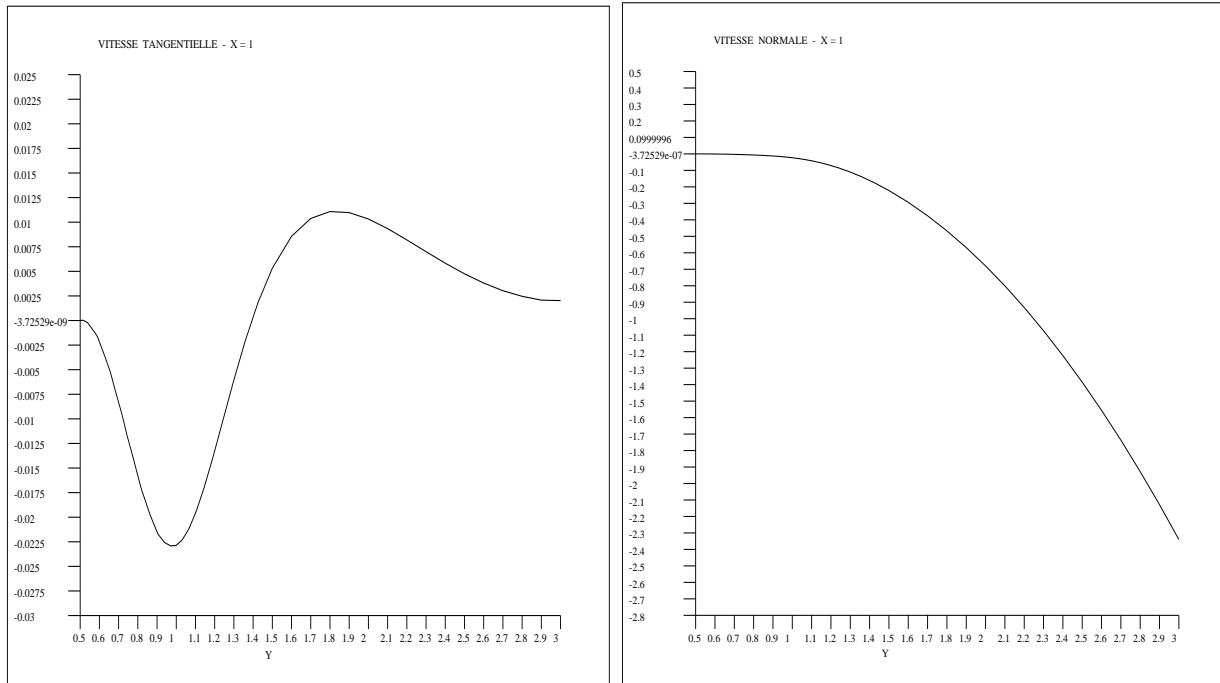


FIG. 9: *La vitesse tangentielle tend vers une constante et la composante normale présente un profil parabolique quand y_2 augmente. La constante d'homogénéisation associée à la composante tangentielle de la vitesse est négligeable par rapport à celle relative à la composante normale.*

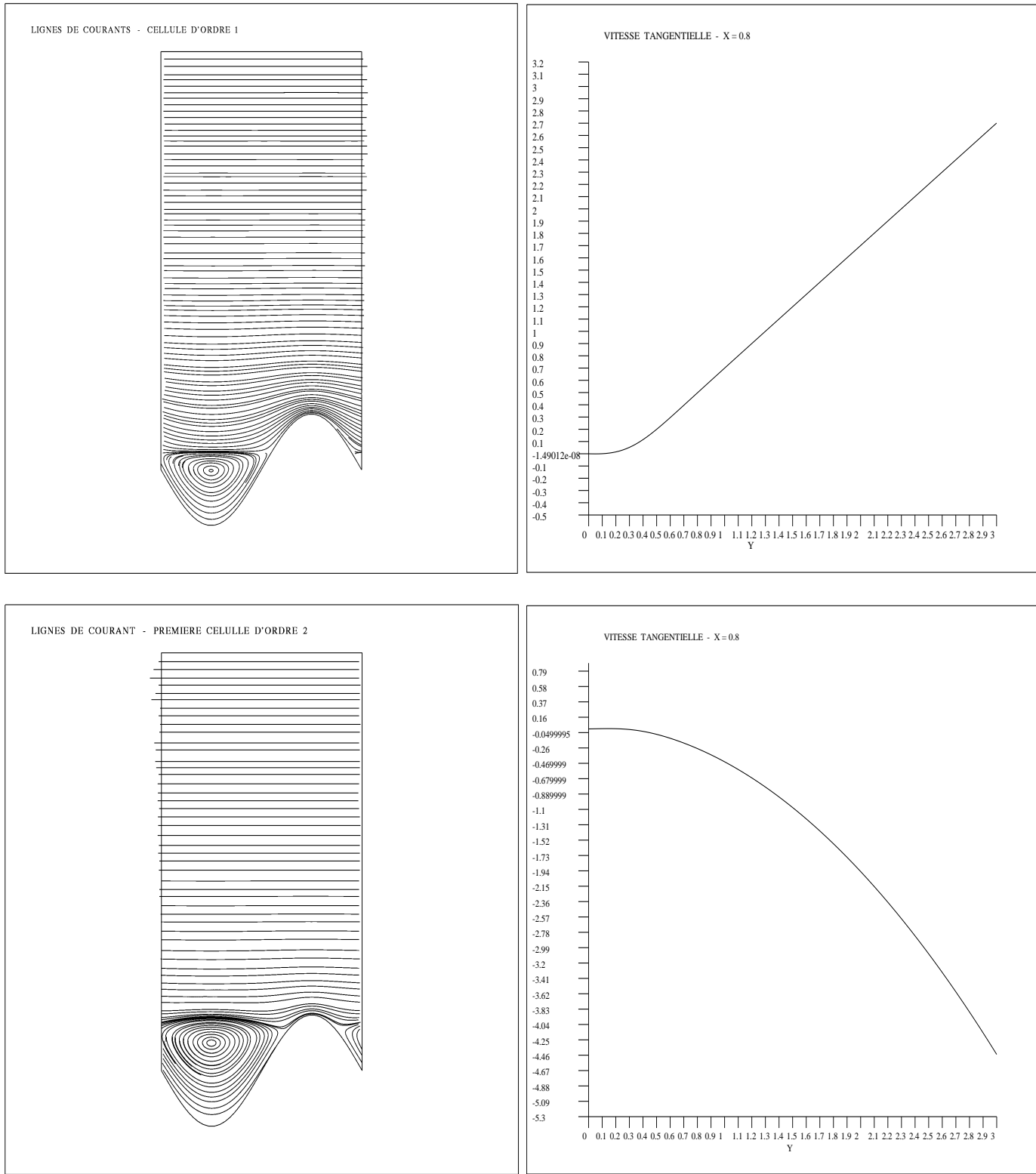


FIG. 10: Lignes de courant du problème de cellule d'ordre un et du premier problème de cellule d'ordre deux, pour la rugosité symétrique (gauche). A droite, coupe de la vitesse tangentielle à y_2 constant.

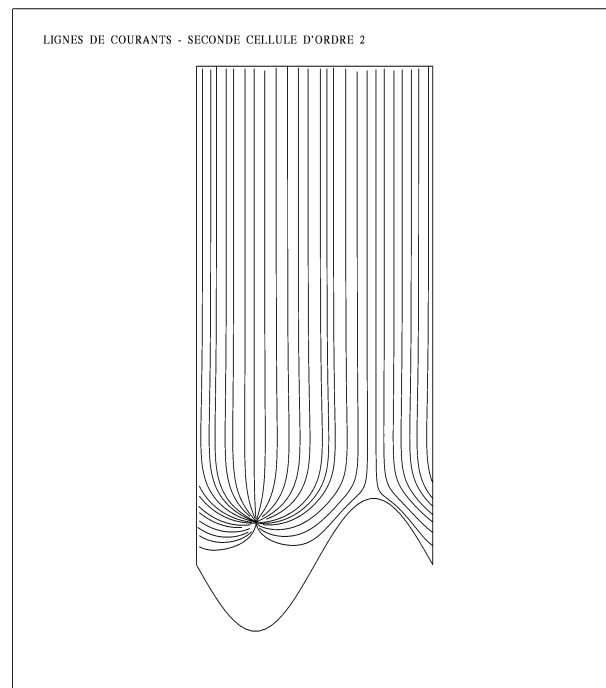


FIG. 11: *Lignes de courant du deuxième problème de cellule d'ordre deux pour la rugosité sinusoïdale*

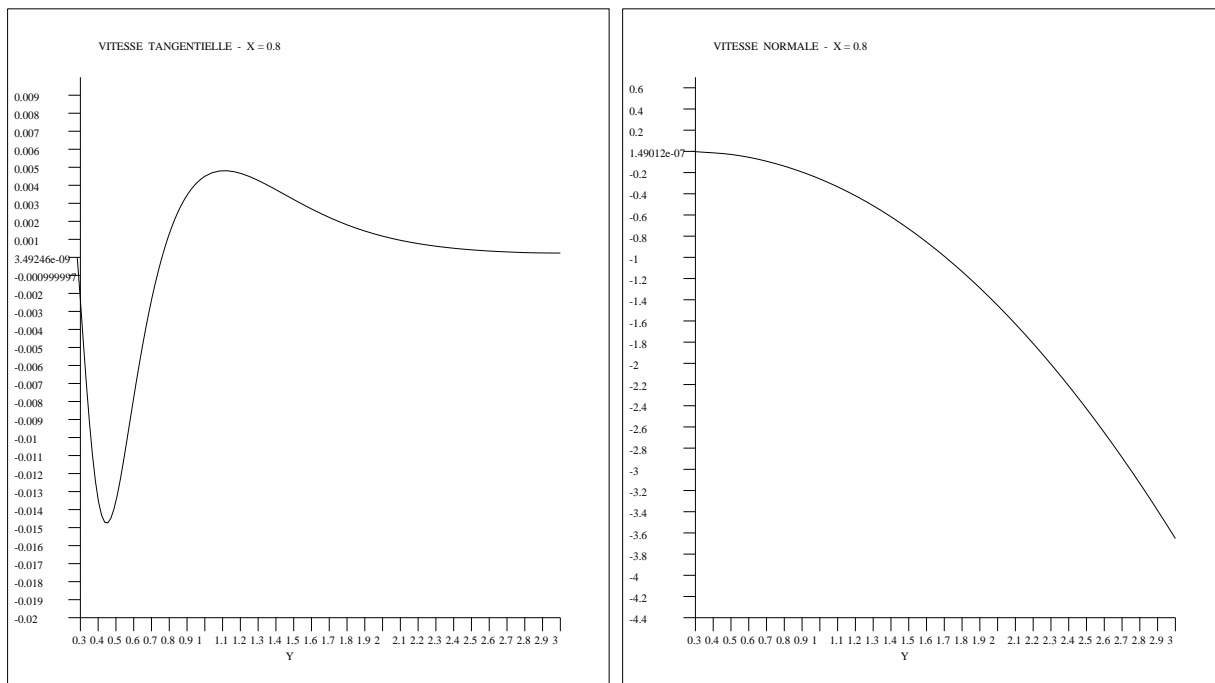


FIG. 12: *Coupe de la vitesse tangentielle et de la vitesse normale associées à la deuxième cellule d'ordre deux.*

À partir des figures 14, 15 et 16, on remarque l'influence de l'utilisation des différentes lois de paroi sur l'écoulement global, les approximations à l'ordre un et deux étant semblables à celles obtenues par le calcul direct. Au contraire du cas précédent, les rugosités influencent l'écoulement global, non seulement en décalant le profil de vitesse vers le haut (figure 13), mais aussi en modifiant les profils de C_f et de pression. Cette différence est due aux importantes dimensions des rugosités disposées au-dessus de la plaque plane. De plus, le décalage de vitesse est très important et les transitions plaque plane - plaque rugueuse ou plaque rugueuse non symétrique - plaque rugueuse symétrique sont plus accentuées.

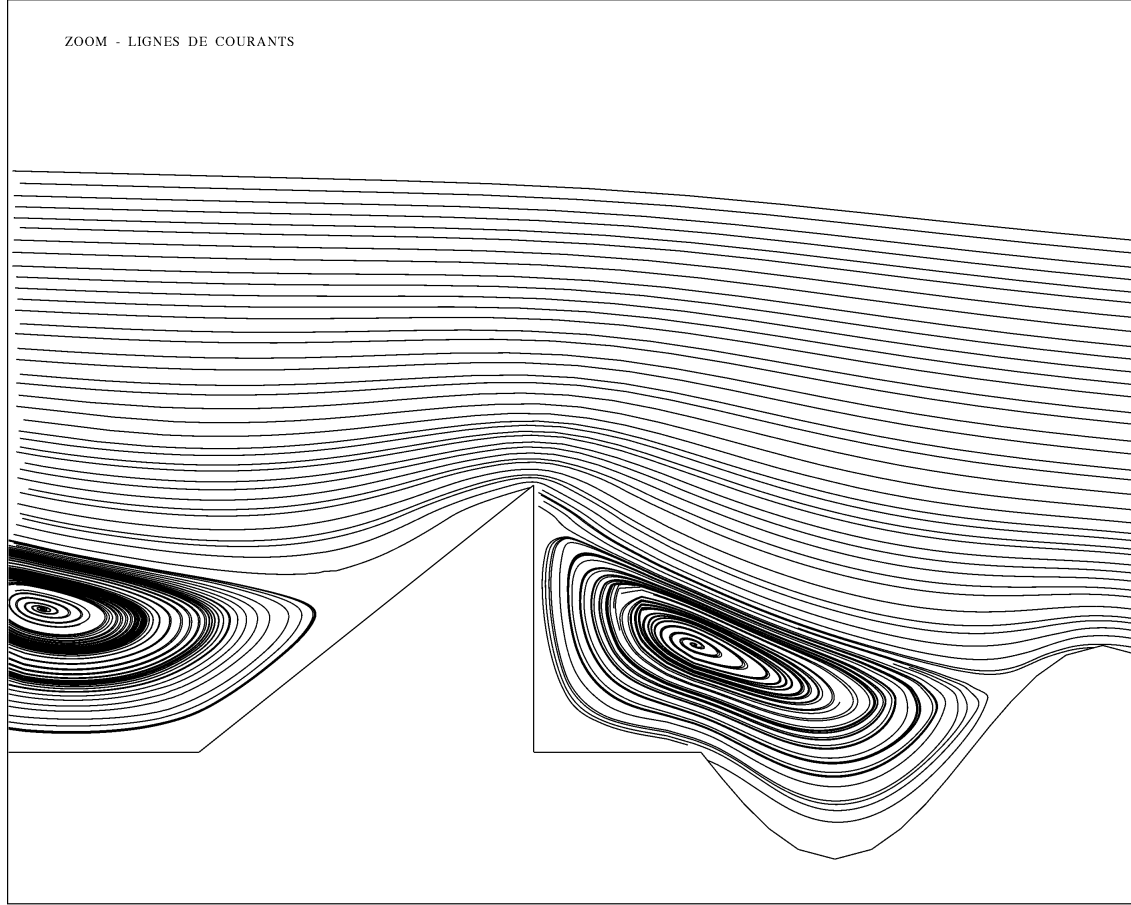


FIG. 13: *Zoom des lignes de courants d'un calcul direct. On remarque l'influence des rugosités sur l'écoulement global, en déplaçant le profil de vitesse vers le haut.*

Dans ce type de problème, l'utilisation des lois de paroi d'ordre un et d'ordre deux avec les constantes d'homogénéisation adaptées à la forme de la rugosité est essentielle pour récupérer les bons profils des variables caractéristiques de l'écoulement (figures 17, 19, 20 et 21). En raison de l'apparition d'un important gradient de pression et de la présence d'importantes zones de transitions plaque plane - plaque rugueuse et plaque rugueuse non symétrique - symétrique, l'utilisation de la loi de paroi d'ordre deux est nécessaire. Des améliorations sensibles sont apportées par l'utilisation de la loi de paroi d'ordre deux, principalement sur les profils de vitesse (figures 18 et 19) et C_f (figures 20 et 21).

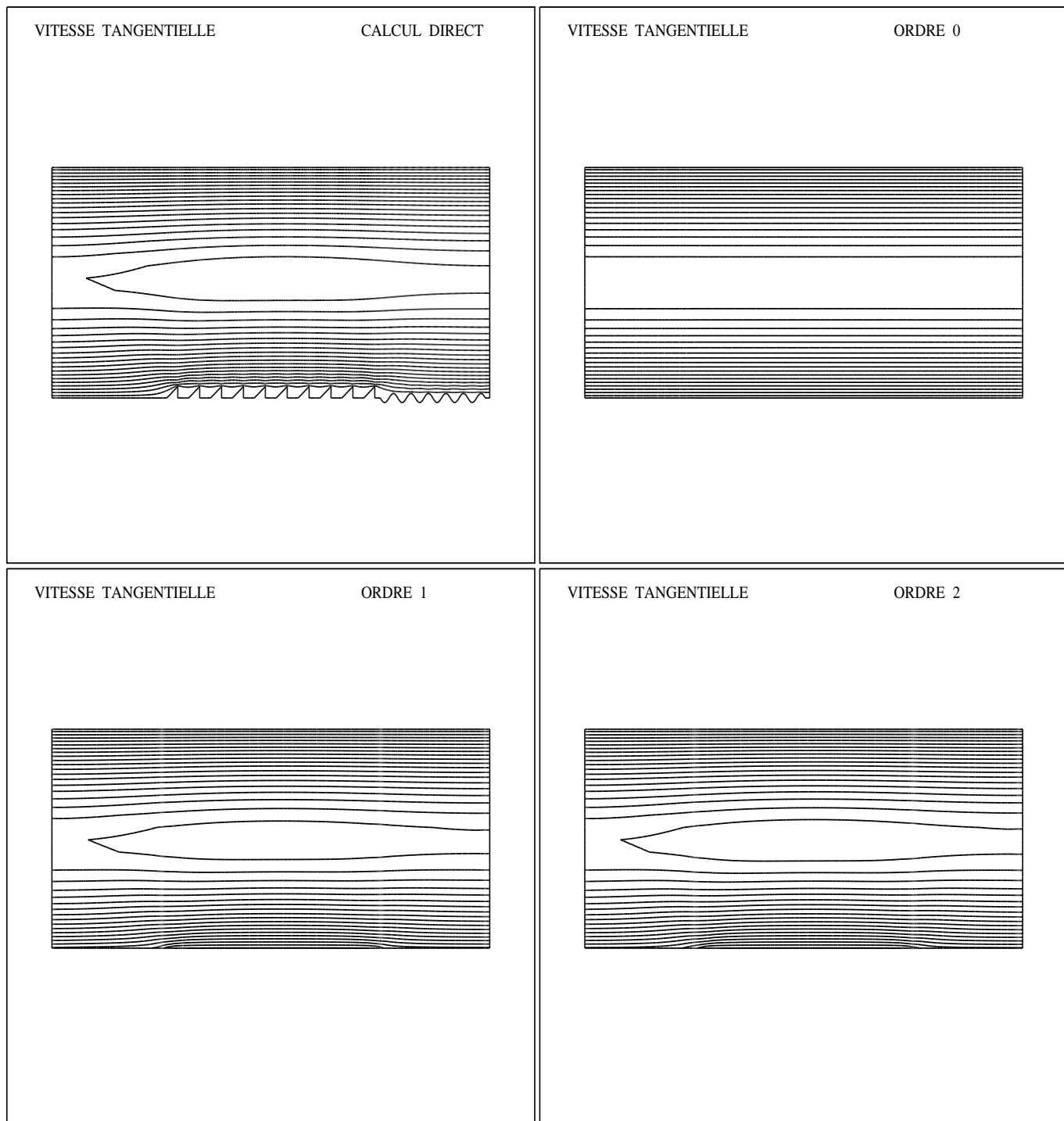


FIG. 14: Les isovaleurs de la vitesse tangentielle par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est $\delta = 0.025$.

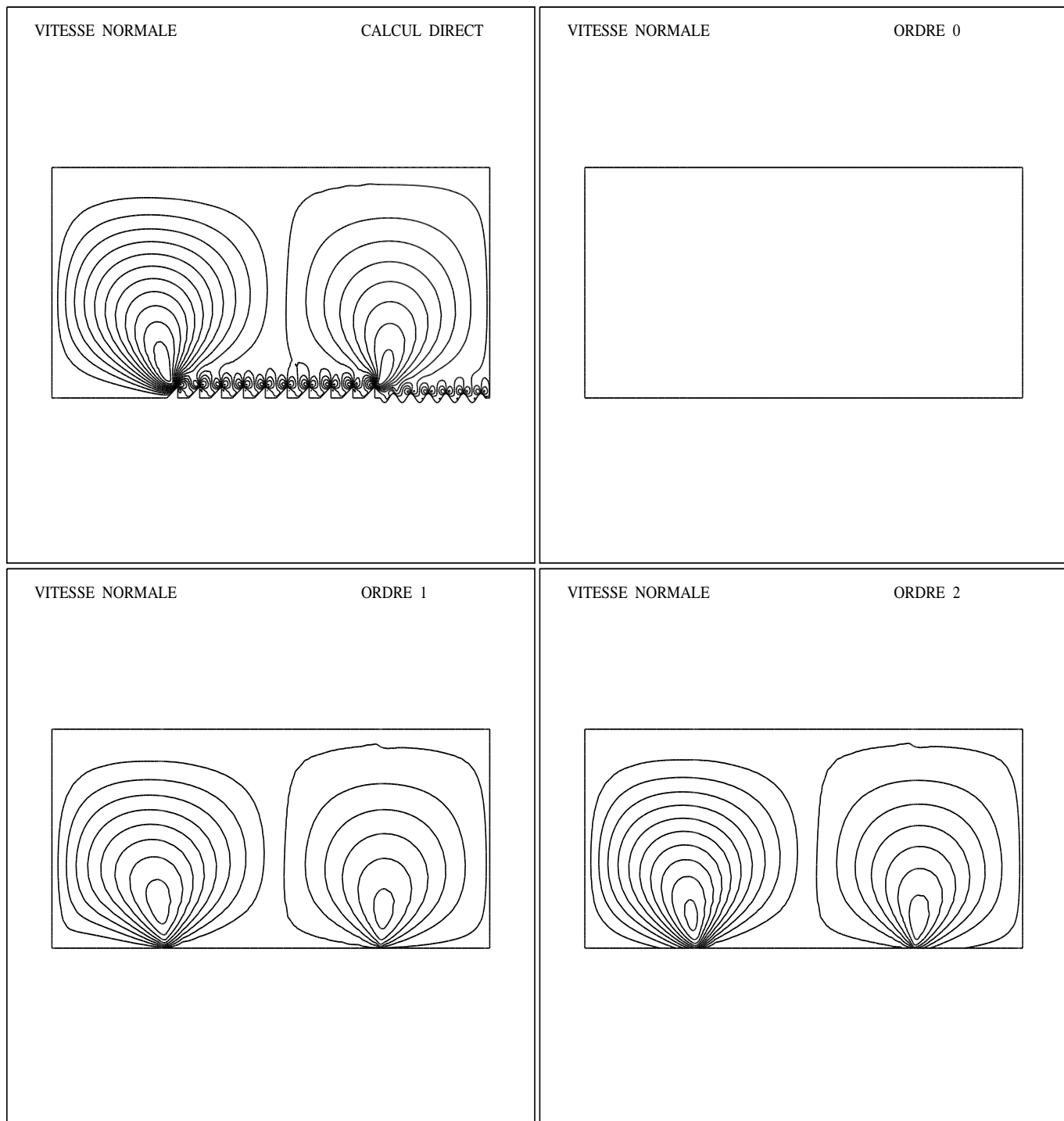


FIG. 15: Les isovaleurs de la vitesse normale par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est $\delta = 0.025$.

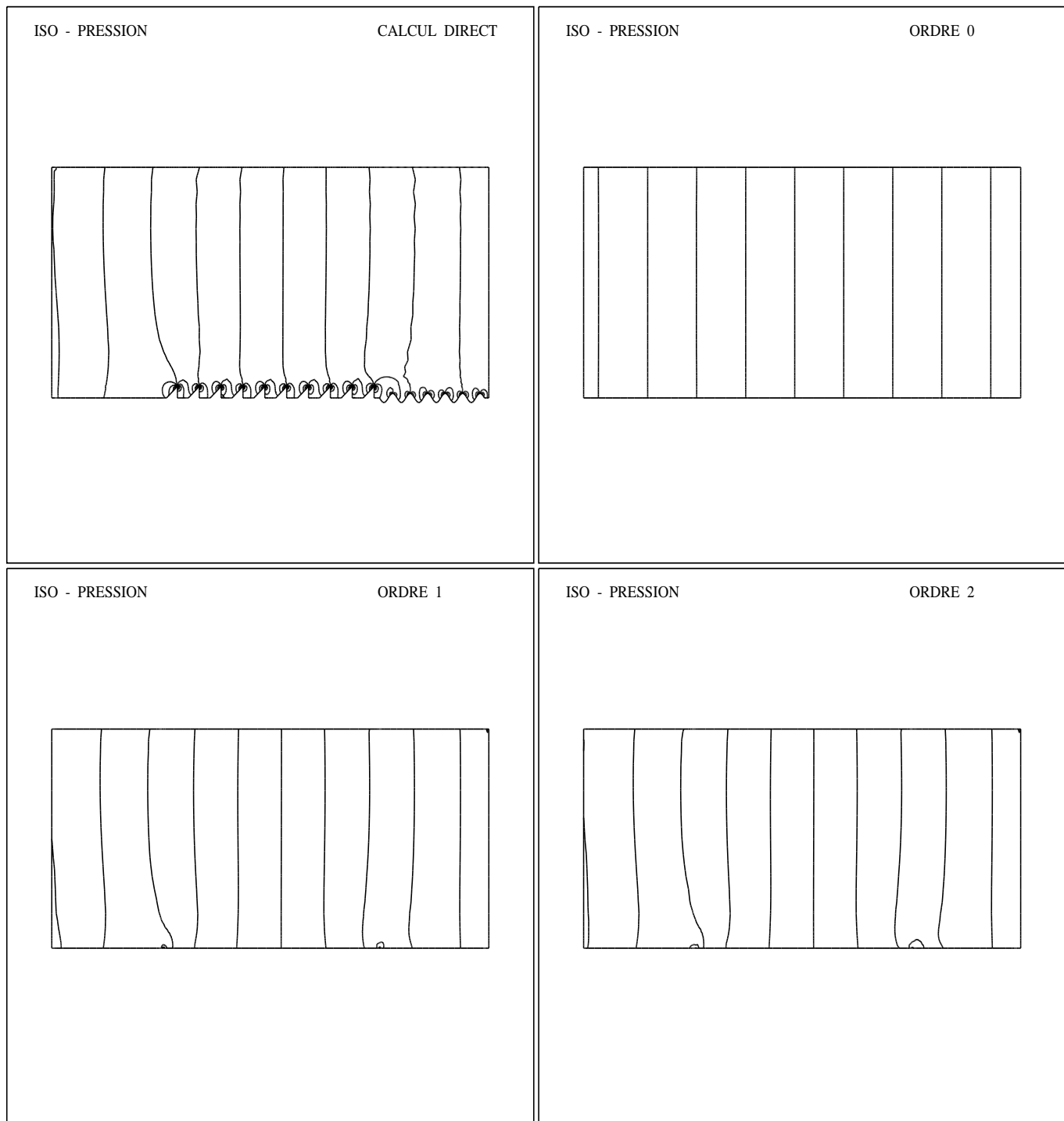


FIG. 16: Comparaison des iso-pressions entre le calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est $\delta = 0.025$.

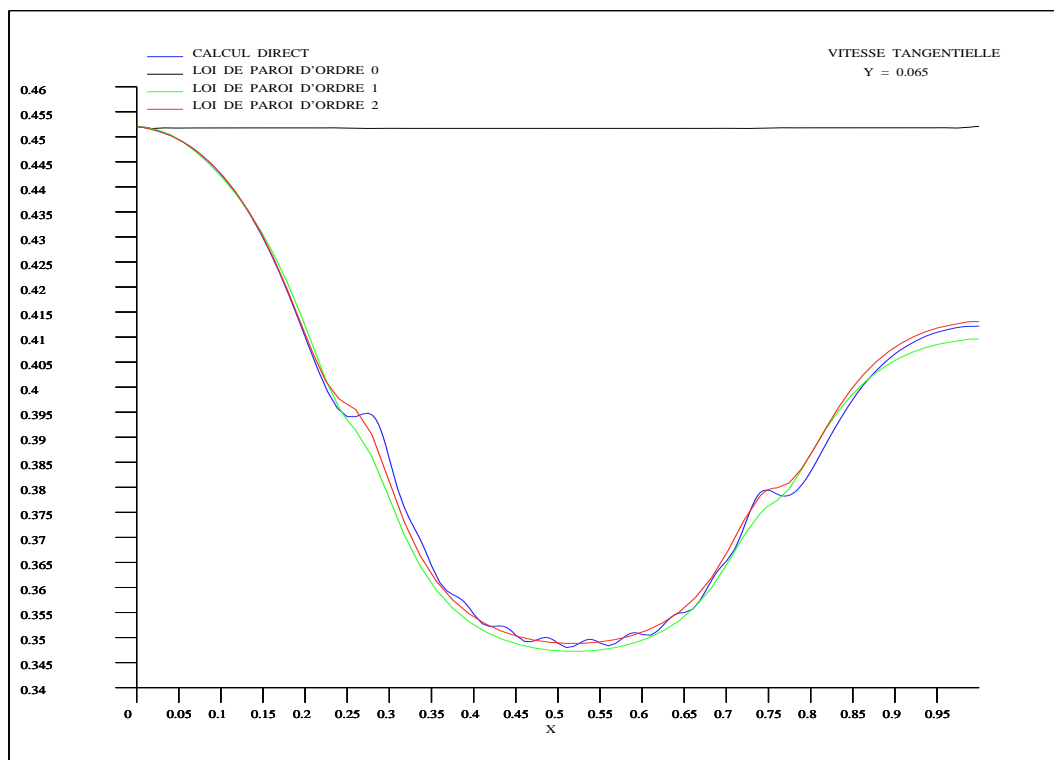
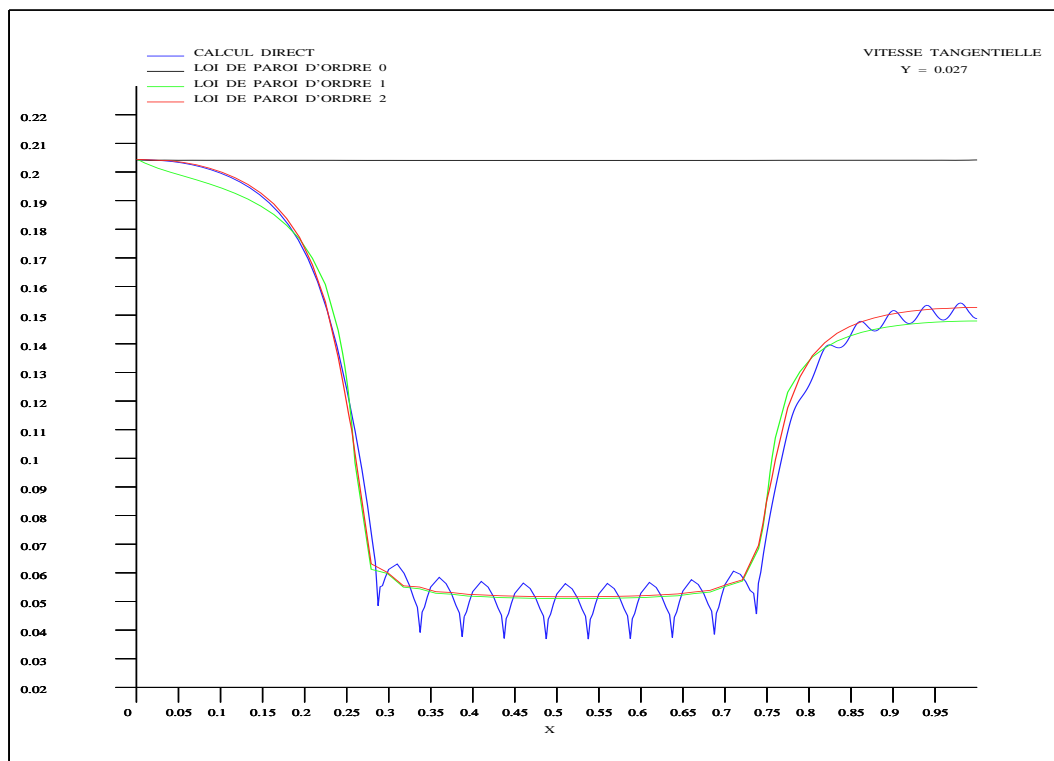


FIG. 17: Comparaison entre les lois de paroi d'ordre zéro, un, deux et calcul direct. Les profils de vitesses tangentielles faits à partir des coupes à $\delta = 0.027$ et $\delta = 0.065$, montrent la convergence vers le profil obtenu par le calcul direct.

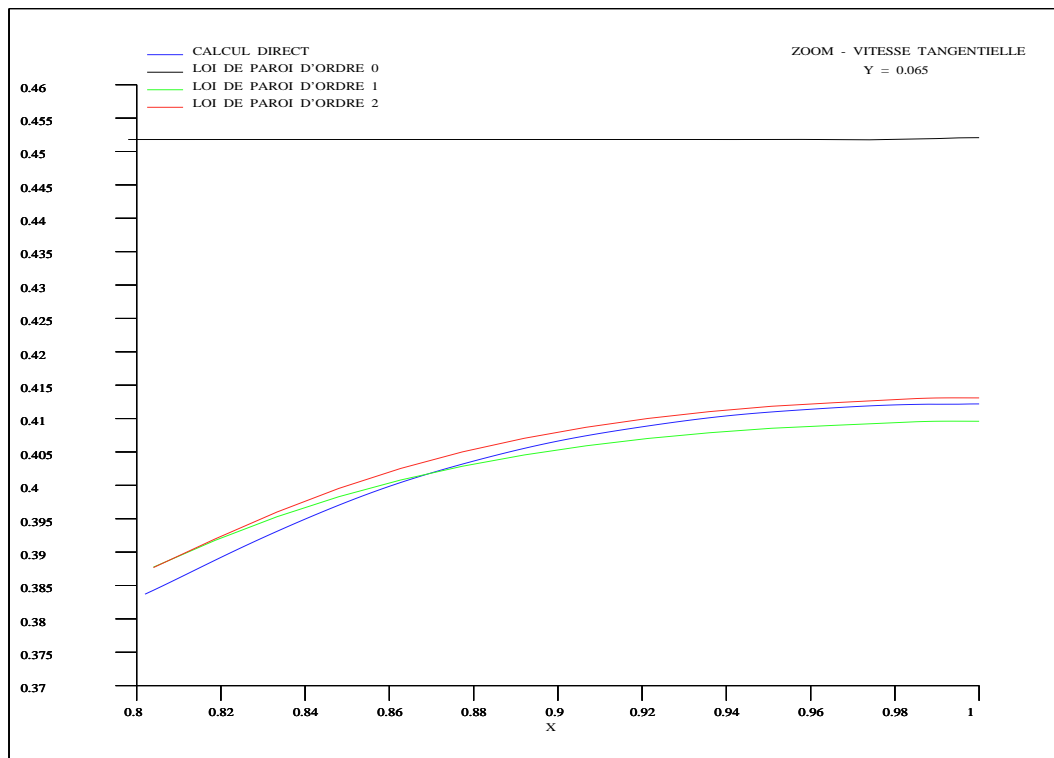
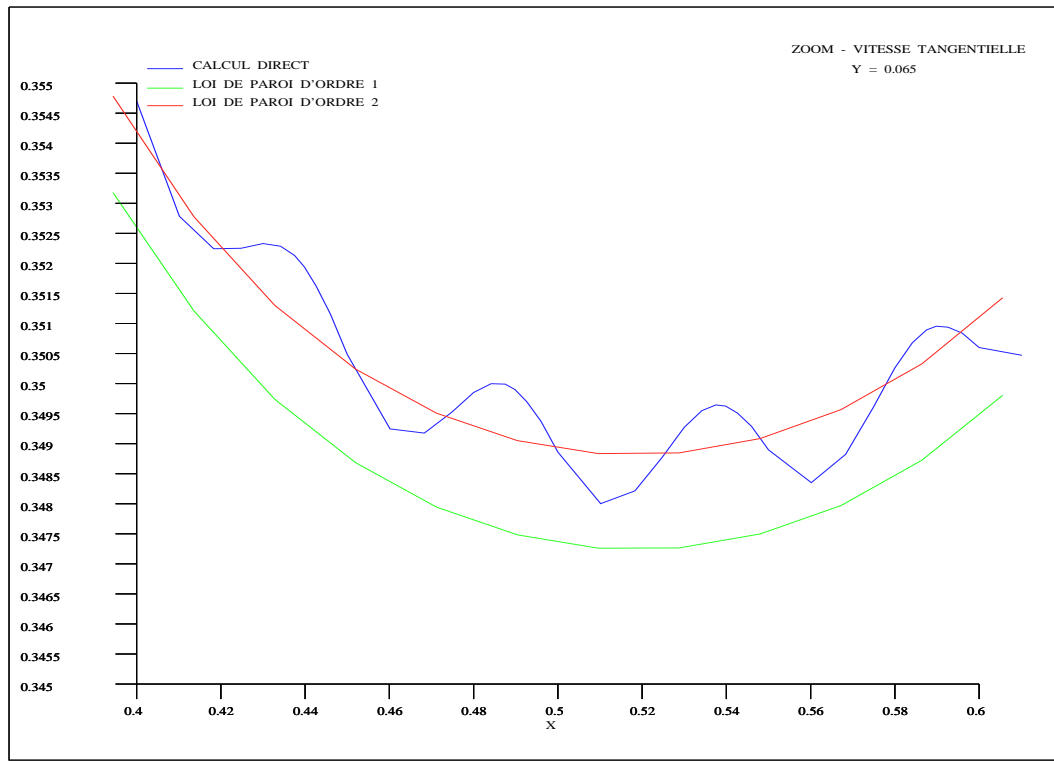


FIG. 18: L'utilisation de la loi de paroi d'ordre deux apporte une amélioration sensible à l'approximation de la solution exacte (zoom de la vitesse tangentielle à $\delta = 0.065$).

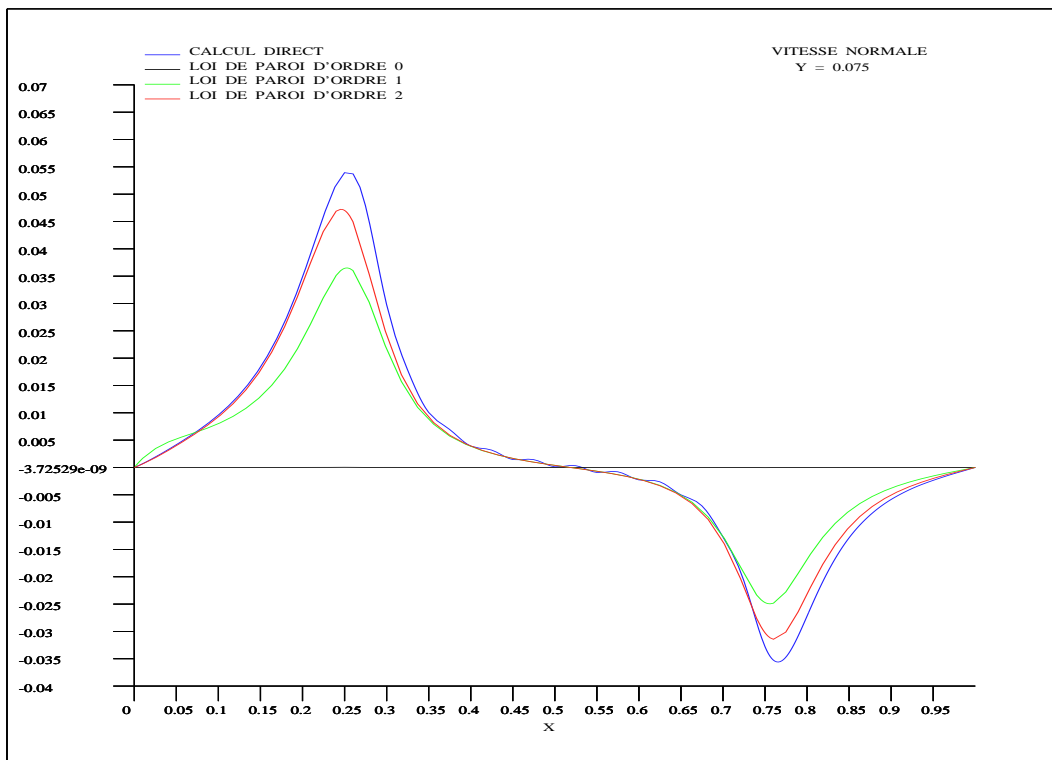
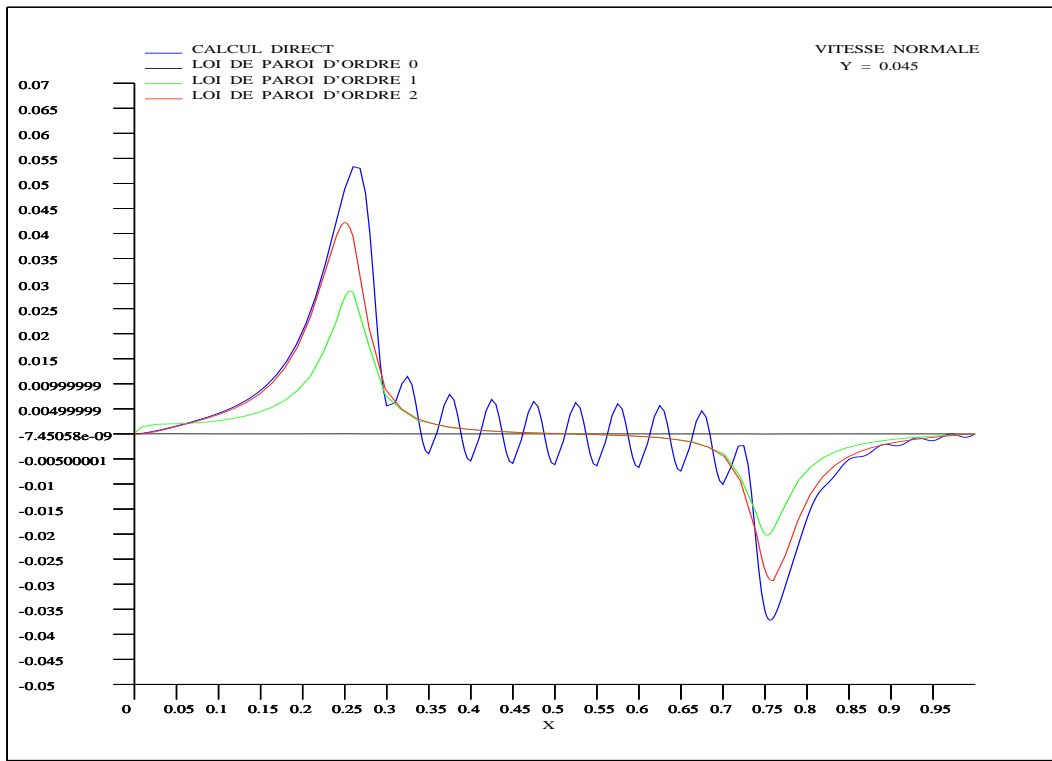


FIG. 19: Comparaison entre les lois de paroi d'ordre zéro, un, deux et calcul direct. Les profils de vitesses normales faits à partir des coupes à $\delta = 0.045$ et $\delta = 0.075$, montrent la convergence vers le profil obtenu par le calcul direct et la sensible amélioration apportée par le passage à l'ordre deux.

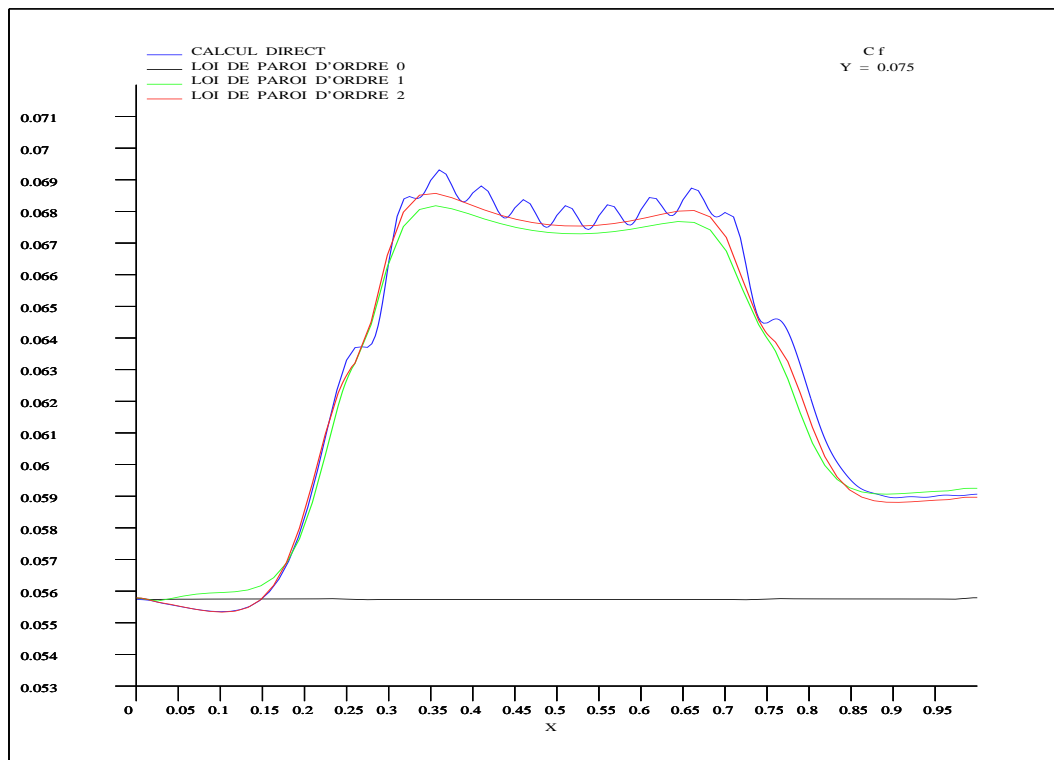
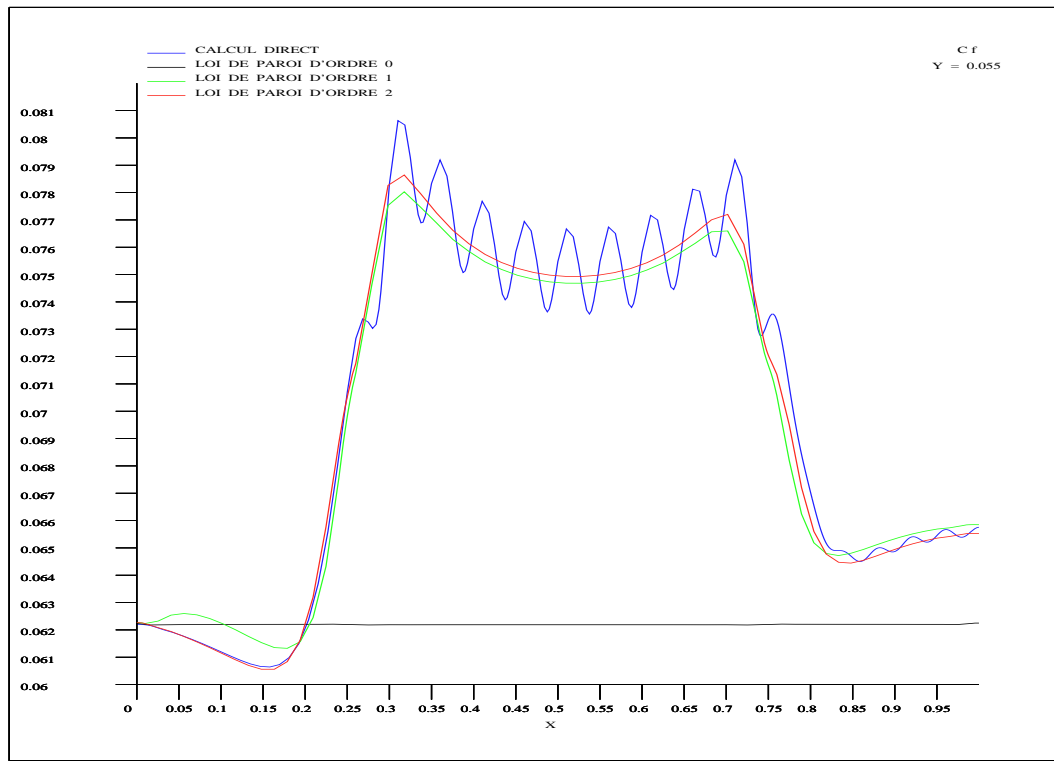


FIG. 20: On compare les profils du C_f à $\delta = 0.055$ et à $\delta = 0.075$. On observe la nécessité de l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé pour simuler correctement les profils de C_f , dans les zones de transition entre les différentes géométries. L'amélioration apportée par l'ordre deux est sensible.

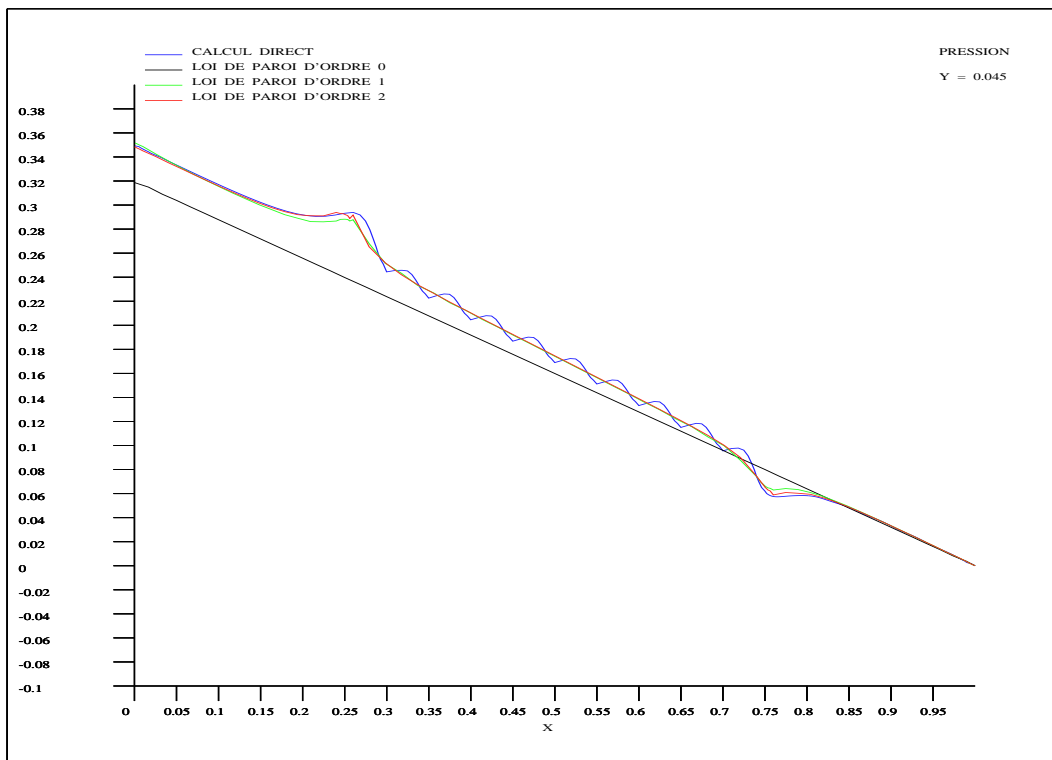
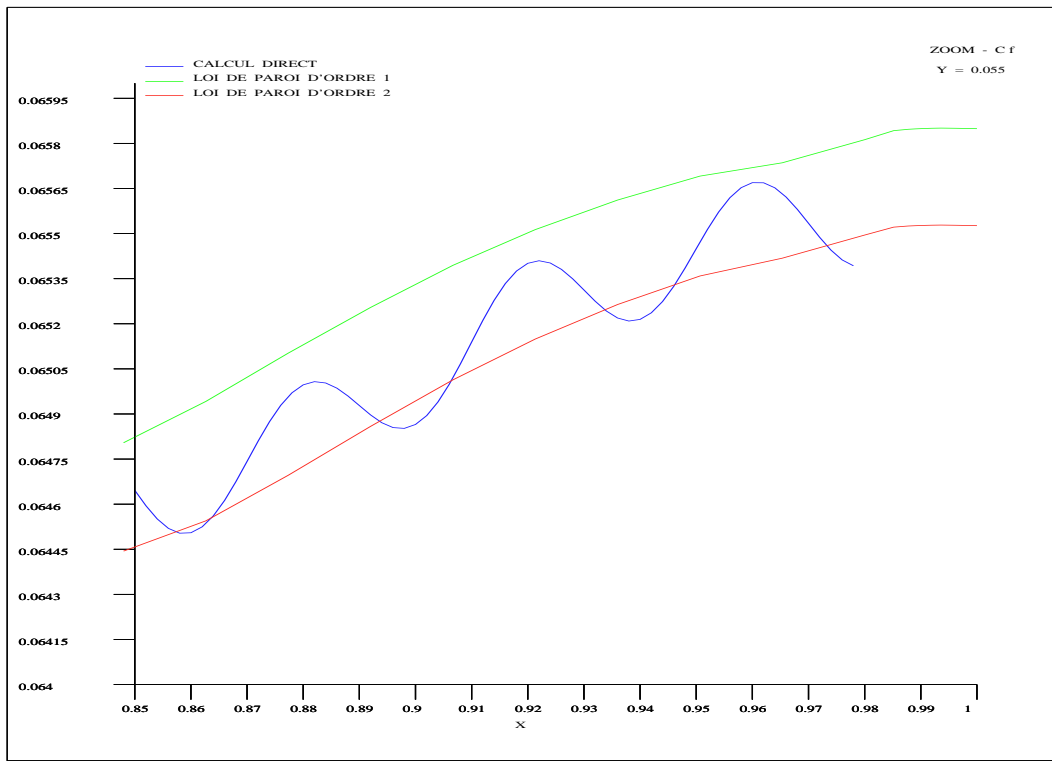


FIG. 21: L'utilisation de la loi de paroi d'ordre deux apporte une amélioration sensible à l'approximation de la solution exacte (zoom du coefficient de friction à $\delta = 0.055$). On observe la nécessité de l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé pour simuler correctement les profils de pression à $\delta = 0.045$.

5.3 Diffuseur avec rugosités sinusoïdales

Comme dans le deuxième cas test, la viscosité est fixée à l'ordre ε . Le domaine est un diffuseur contenant sur sa partie inférieure, une plaque plane, suivie d'une plaque rugueuse avec des rugosités sinusoïdales et d'une nouvelle plaque plane. L'objectif est de vérifier l'importance de l'utilisation des approximations d'ordre élevé pour des écoulements présentant un important gradient de pression. De plus, on étudie la prise en charge par les lois de paroi des transitions plaque plane-rugueuse-plane, souvent retrouvées dans la pratique. Les caractéristiques du problème sont

- $Re = 100$,
- un profil parabolique à l'entrée, à la frontière supérieure $\mathbf{u} = (0, 0)$ et $p = 0$ et $u^n = 0$ à la sortie.
- Les caractéristiques pour le calcul direct sont :
 - Condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi inférieure,
 - Domaine avec la paroi inférieure : plane $[0, 0.26]$, rugueuse $[0.26, 0.74]$, plane $[0.74, 1]$, l'entrée de dimensions $[0, 0.2]$ avec un angle $\theta \approx 21.8$,
 - 12 rugosités sinusoïdales de dimensions $[0, 0.04] \times [0, 0.01]$,
 - 9600 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - Condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 1]$, l'entrée de dimensions $[0, 0.2]$ avec un angle $\theta \approx 21.8$,
 - 2600 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un et deux sont :
 - Loi de paroi d'ordre un ou deux à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 0.26]$, plaque rugueuse $[0.26, 0.74]$, plaque plane $[0.74, 1]$, l'entrée de dimensions $[0.01, 0.2]$ avec un angle $\theta \approx 21.8$,
 - 2400 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques du problème de cellule sont :

- $Re = 1$,
- $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi, condition de y_1 -périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 1$ (où $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 5$ et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ à l'ordre deux) et $u^n = 0$ à l'infini,
- Domaine : $[0, 4] \times [0, 5]$ avec rugosité de dimensions $[0, 4] \times [0, 1]$,

- 2000 éléments Q1-Q1.

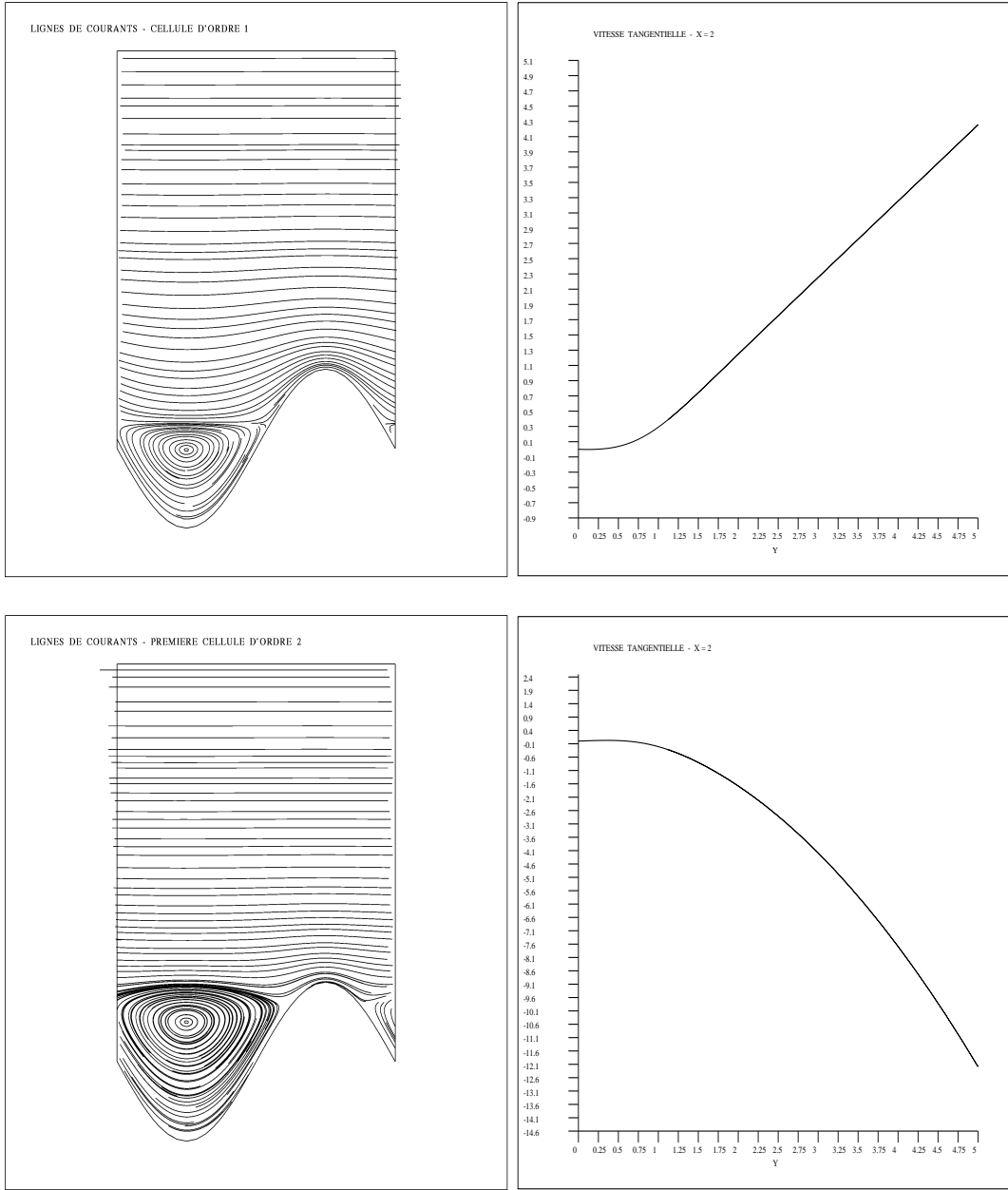


FIG. 22: *Problème de cellule d'ordre un et première cellule d'ordre deux.*

La résolution des problèmes de cellules à l'ordre un et deux avec $\varepsilon = 0.01$ et la distance à la paroi fixée à $\delta = 0.015$, nous donnent les constantes d'homogénéisation pour la frontière rugueuse (figures 22-24)

$\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = 0.7546$, $\langle \chi_t^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -0.8114$, $\langle \chi_t^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = 4.72 \times 10^{-4}$ et $\langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -0.32$
et pour la frontière plane $\langle \chi_{tt}^0 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = 1.5$, $\langle \chi_t^1 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -1.125$, $\langle \chi_t^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = 0$ et $\langle \chi_n^2 \rangle_{|\Gamma_{\text{sup}}} = -1.125$.

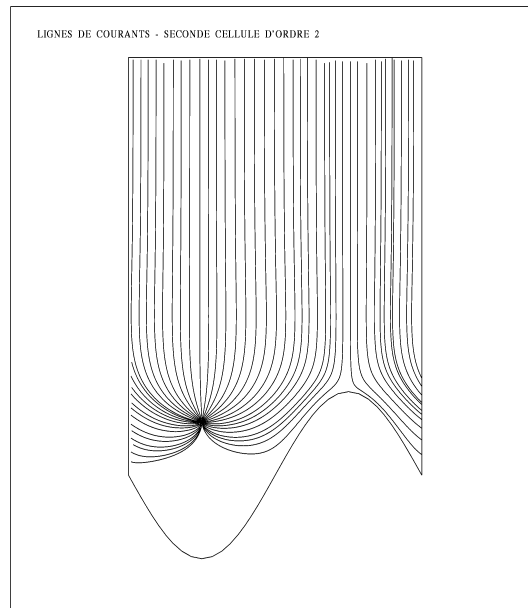


FIG. 23: *Lignes de courants du second problème de cellule d'ordre deux.*

De façon analogue au problème précédent, les rugosités influencent toutes les variables. La vitesse est décalée vers le haut et le coefficient de friction et la pression augmentent, avec des discontinuités dans le passage frontière plane-rugueuse-plane. L'emploi des lois de paroi d'ordre un et deux permet de retrouver une bonne précision des approximations par rapport à la solution établie par le calcul direct (figures 27, 29 et 31).

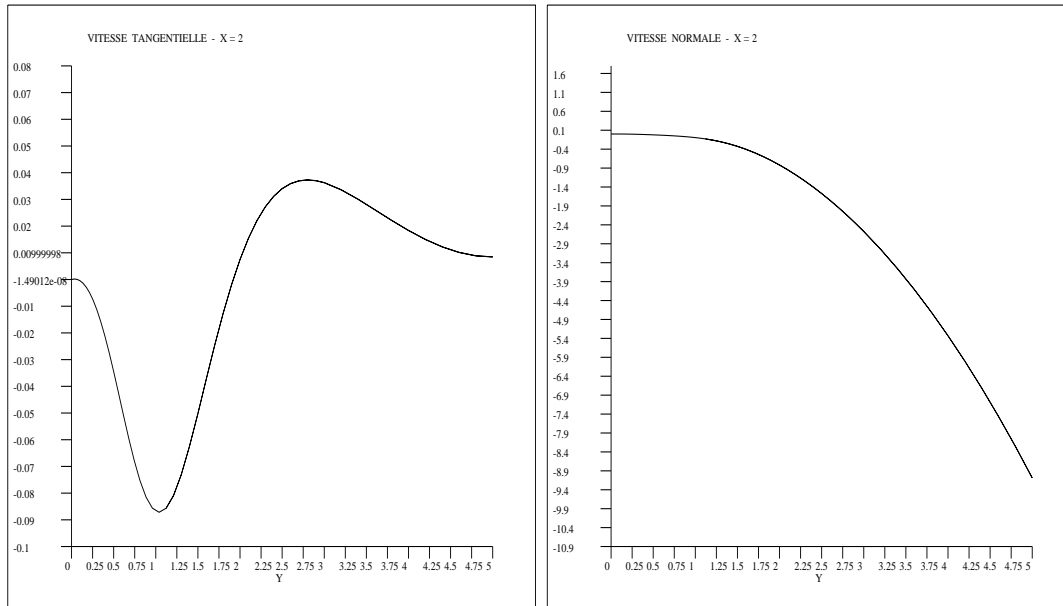


FIG. 24: *Second problème de cellule d'ordre deux, composantes normale et tangentielle de la vitesse.*

Encore une fois, on a remarqué l'amélioration apportée par le passage à l'ordre deux, en raison du fort gradient de pression non constant et les zones de discontinuité entre les plaques planes et la plaque rugueuse (figures 28, 29 et 30). Cette amélioration se doit principalement à la présence, dans la loi de paroi d'ordre deux, d'un terme de gradient de pression et de la modélisation plus réaliste de la composante de la vitesse normale.

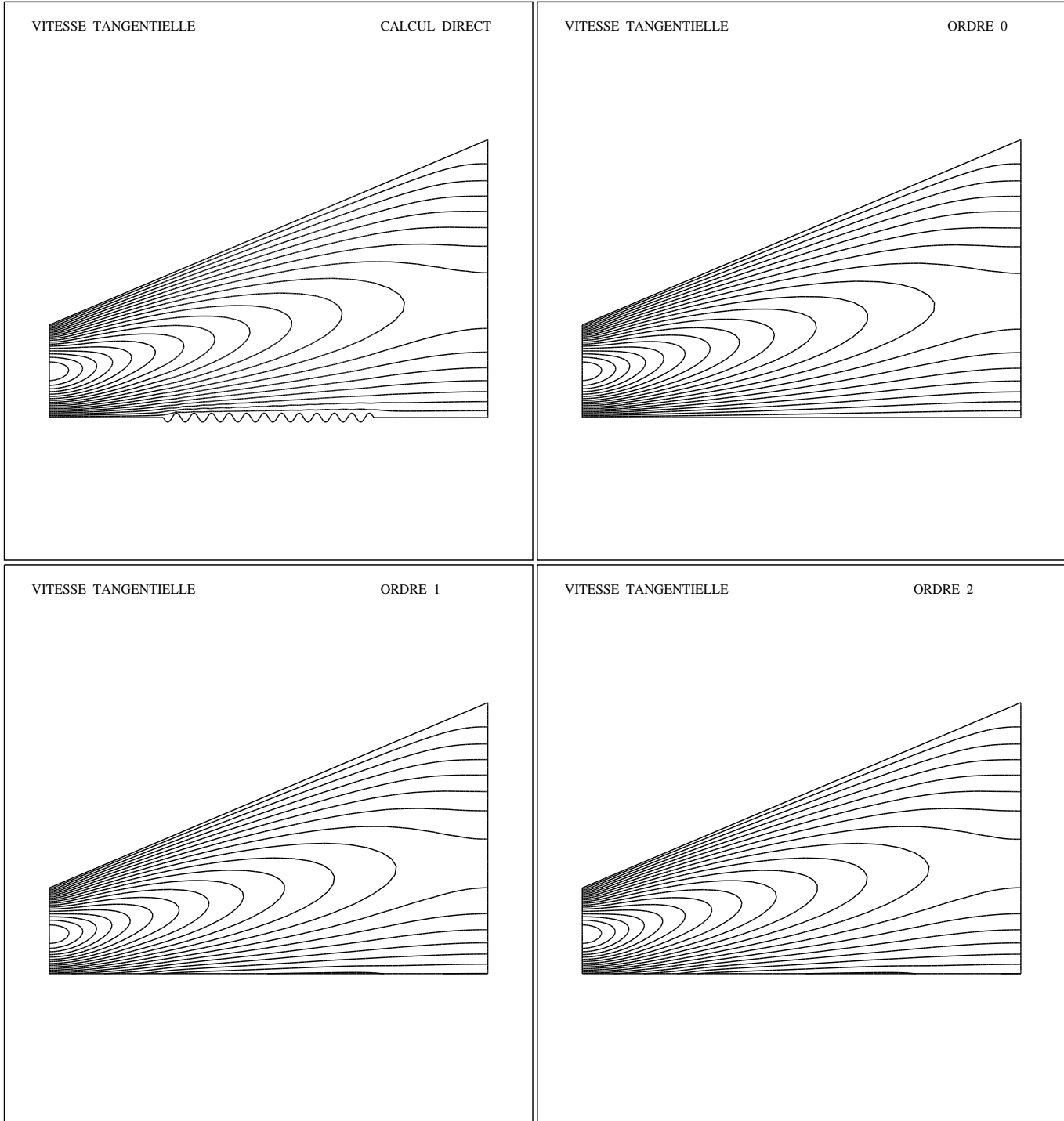


FIG. 25: *Isolignes de la vitesse tangentielle dans un diffuseur avec profil parabolique à l'entrée. Le δ est fixé à 0.015 pour les lois de paroi d'ordre un et deux.*

A partir des figures 25 et 26, on remarque que les isovaleurs de vitesse et pression par le calcul direct sont reproduites par l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé, en utilisant un maillage quatre fois plus grossier.

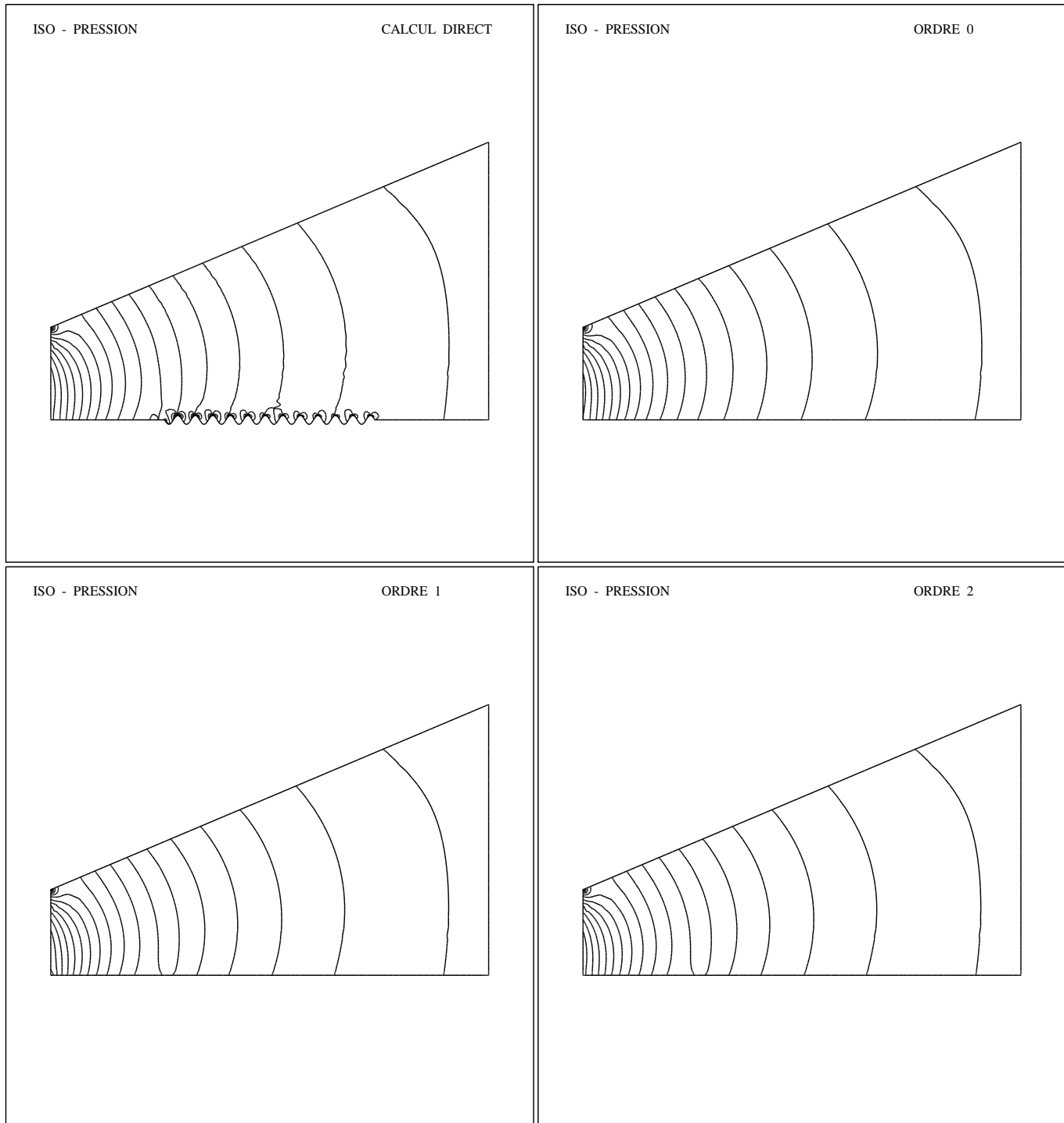


FIG. 26: *Comparaison entre les isovaleurs de pression par un calcul direct et en utilisant les lois de paroi ($\delta = 0.015$).*

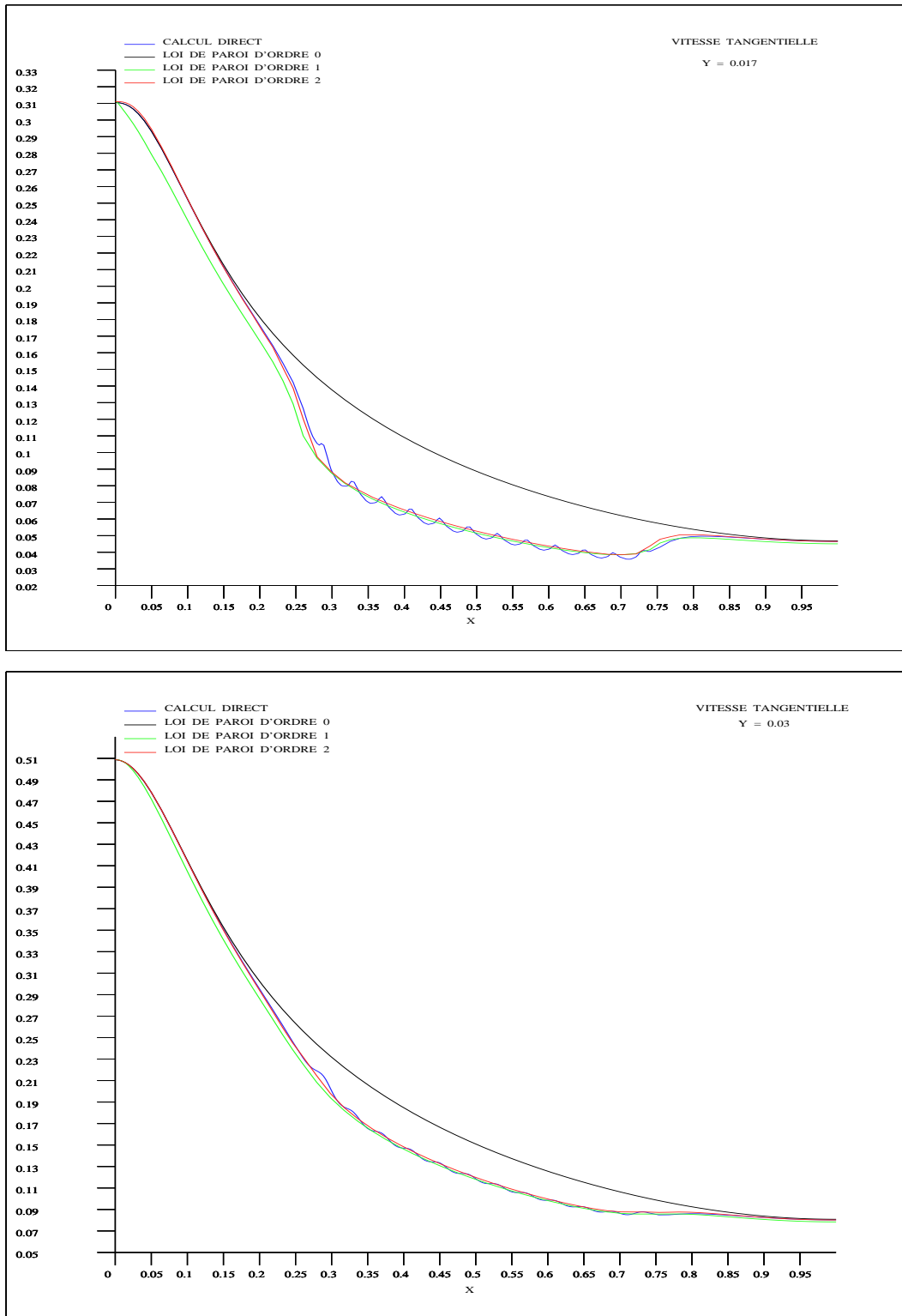


FIG. 27: En accord avec la théorie, les profils de vitesse tangentielle obtenus avec les lois de paroi d'ordre un et deux, convergent vers celui obtenu par le calcul direct, quand x_2 augmente. La transition plaque plane-rugueuse-plane est bien retrouvée, principalement en utilisant la loi de paroi d'ordre deux.

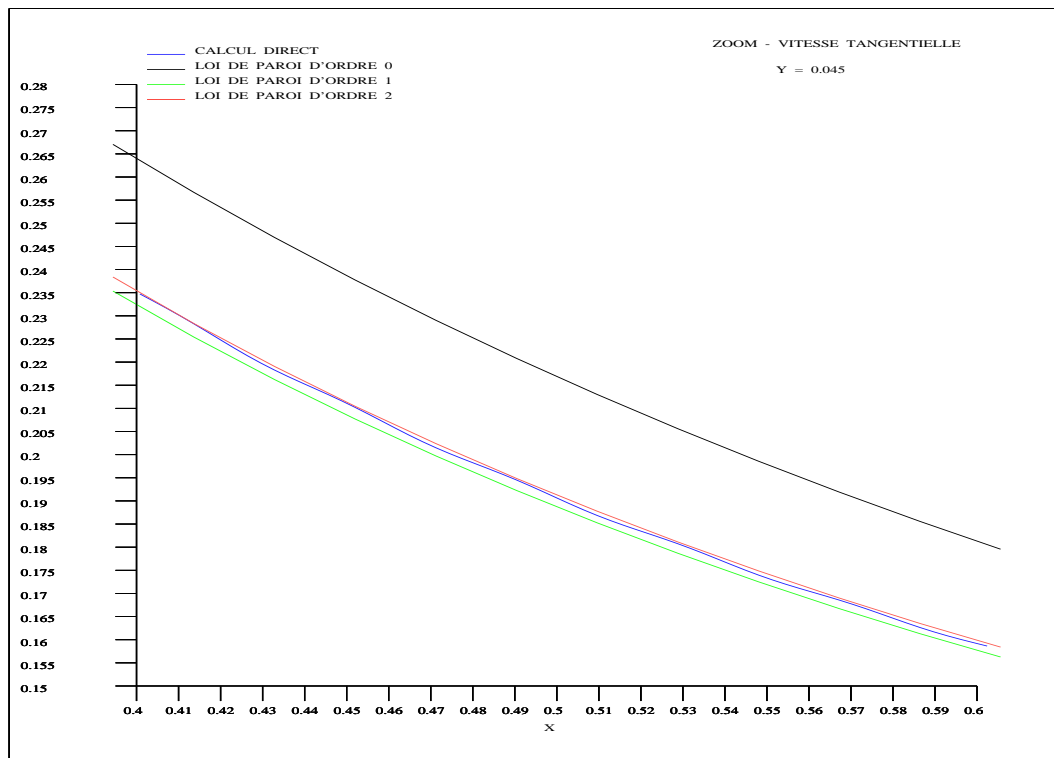
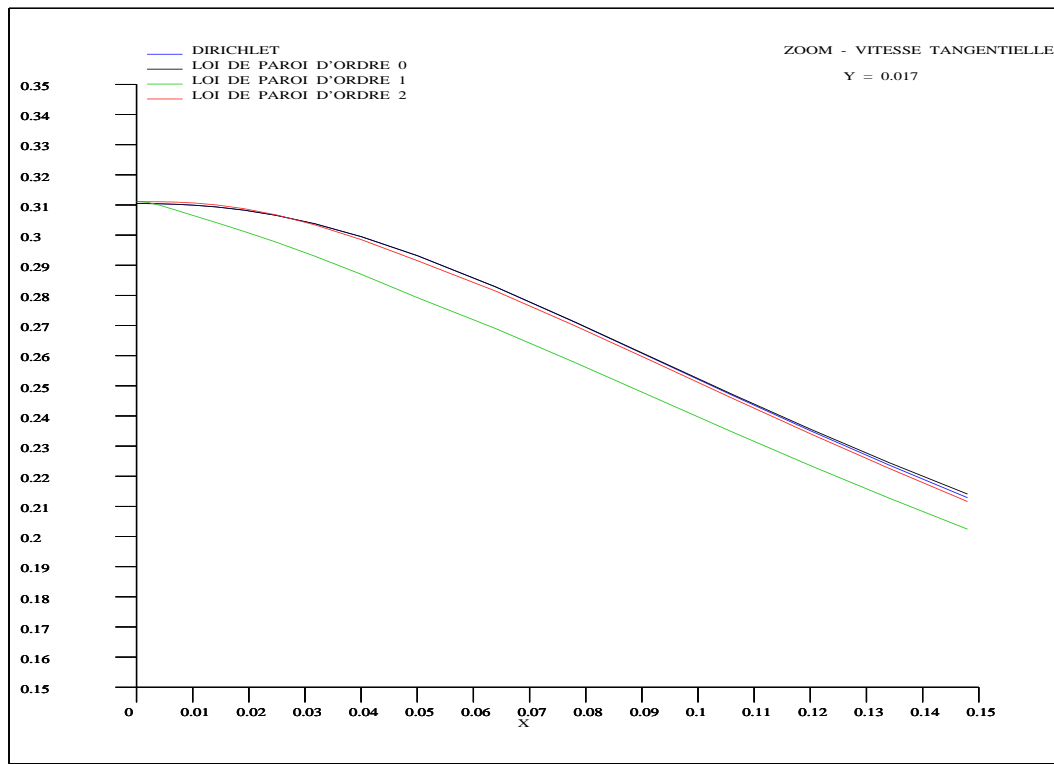


FIG. 28: Zoom des profils de vitesse. L'utilisation de l'approximation à l'ordre deux est nécessaire quand le gradient de pression est important et des zones de transitions sont présentes dans le domaine.

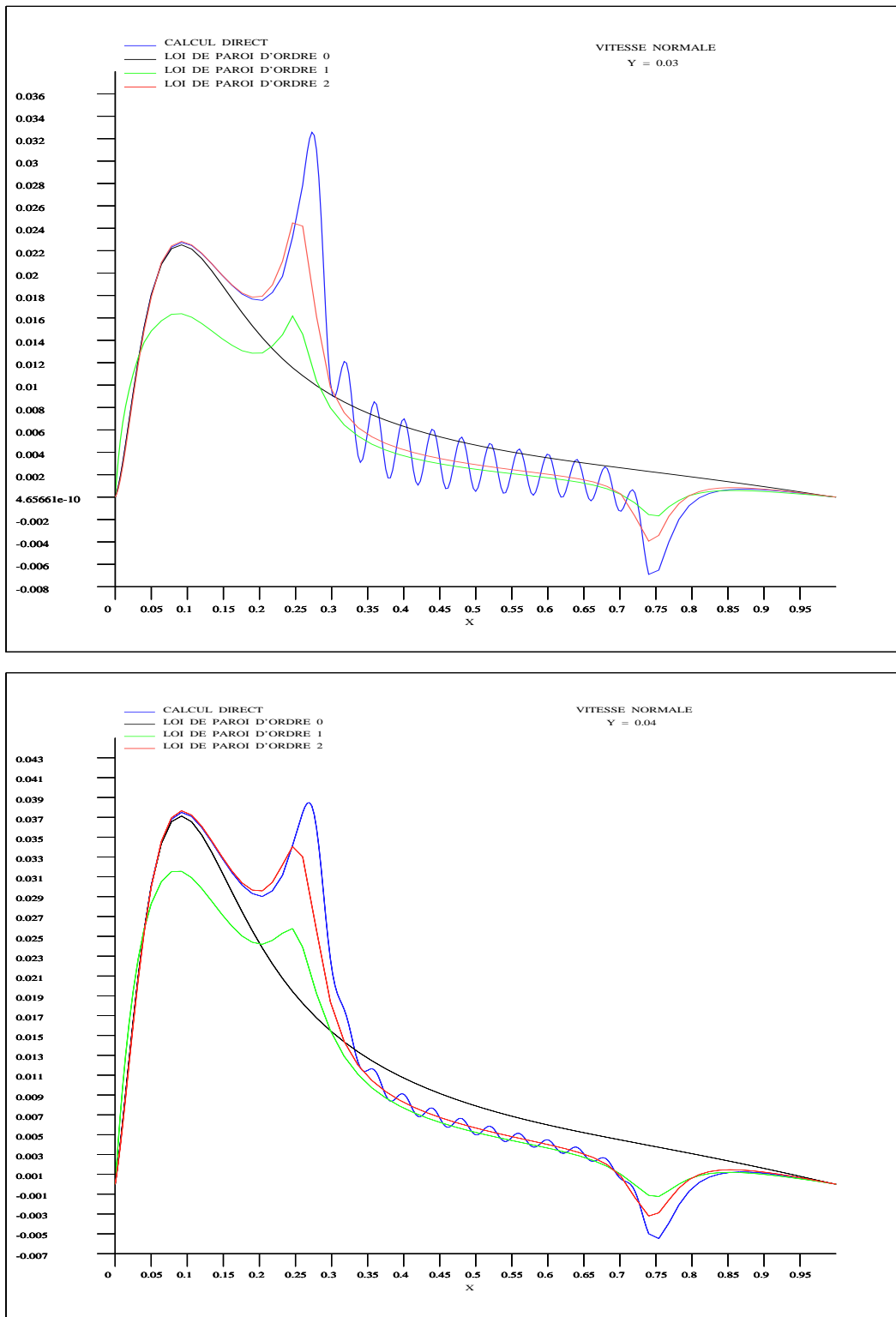


FIG. 29: En accord avec la théorie, les profils de vitesse normale obtenus avec les lois de paroi d'ordre un et deux, convergent vers celui obtenu par le calcul direct, quand x_2 augmente. L'utilisation de l'approximation à l'ordre deux, permet d'avoir la composante normale de la vitesse non nulle, ce qui améliore sensiblement l'approximation.

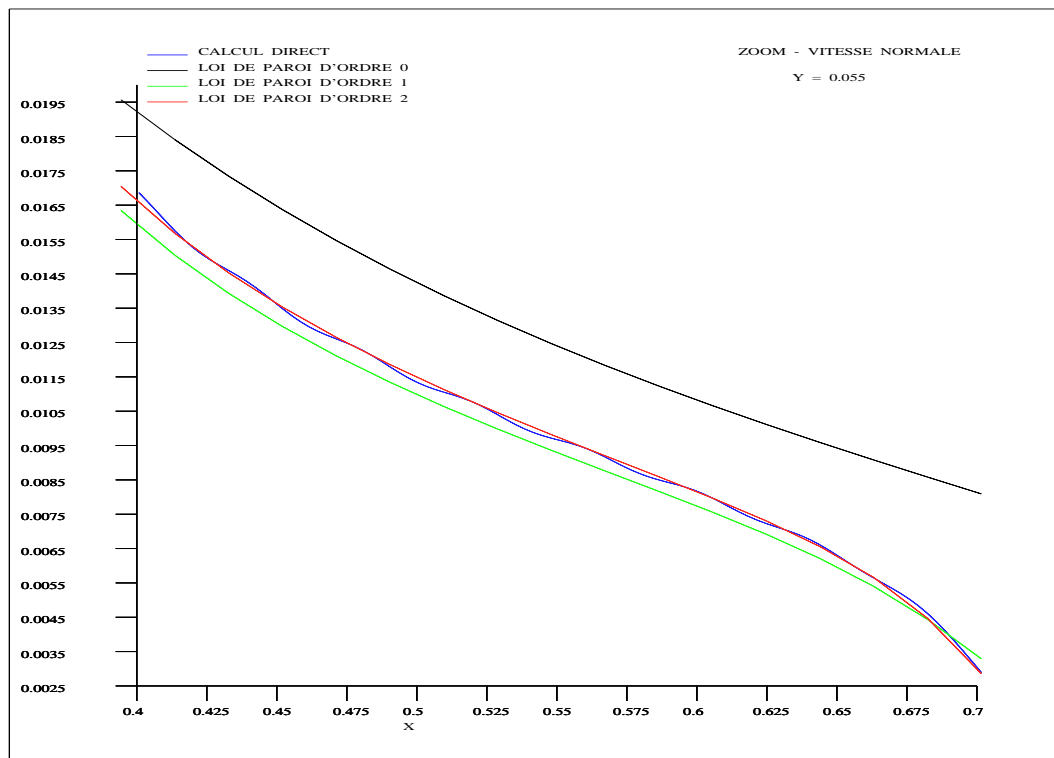
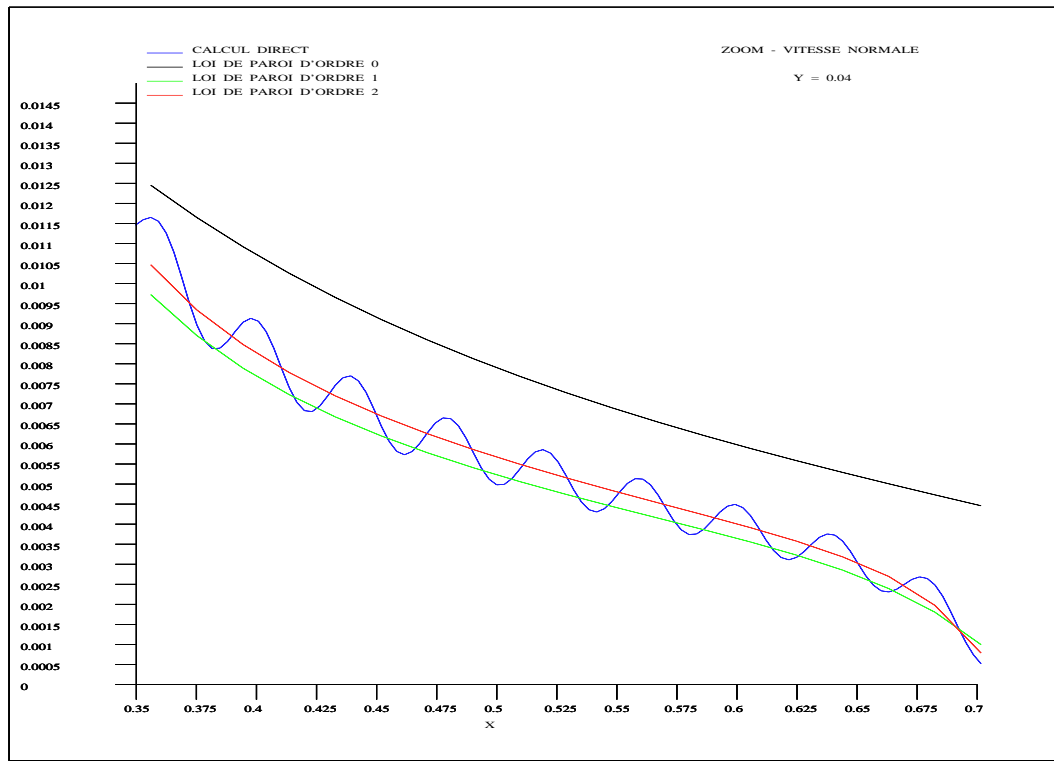


FIG. 30: Zoom des profils de vitesse normale. L'utilisation de l'approximation à l'ordre deux apporte une précision plus sensible.

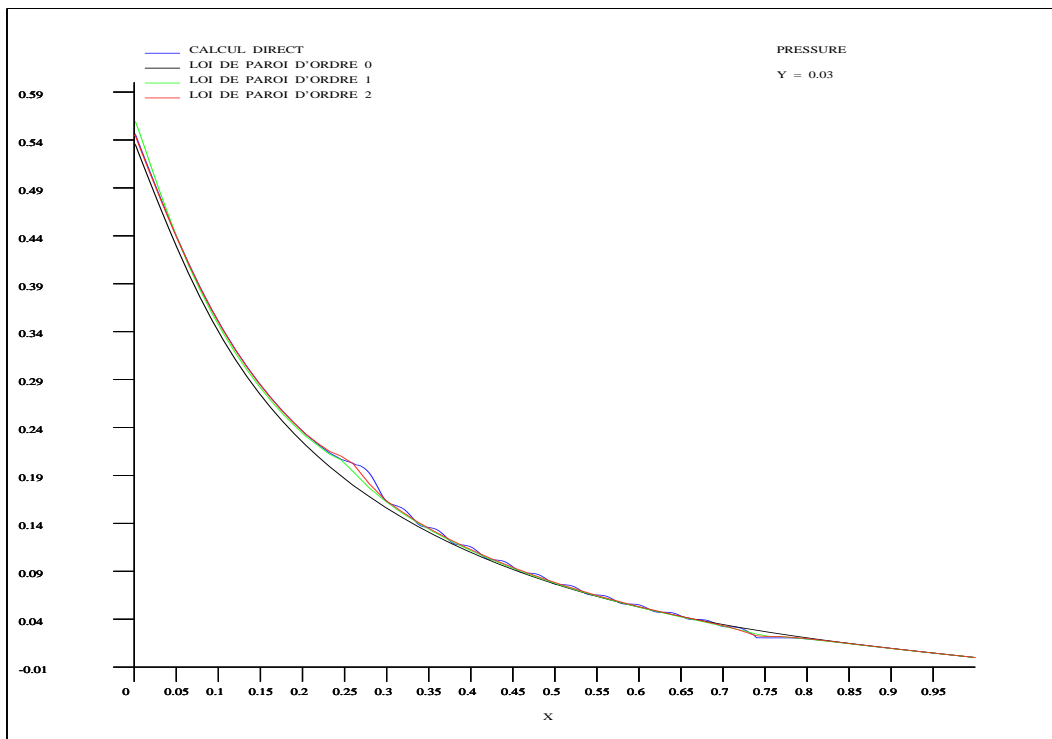
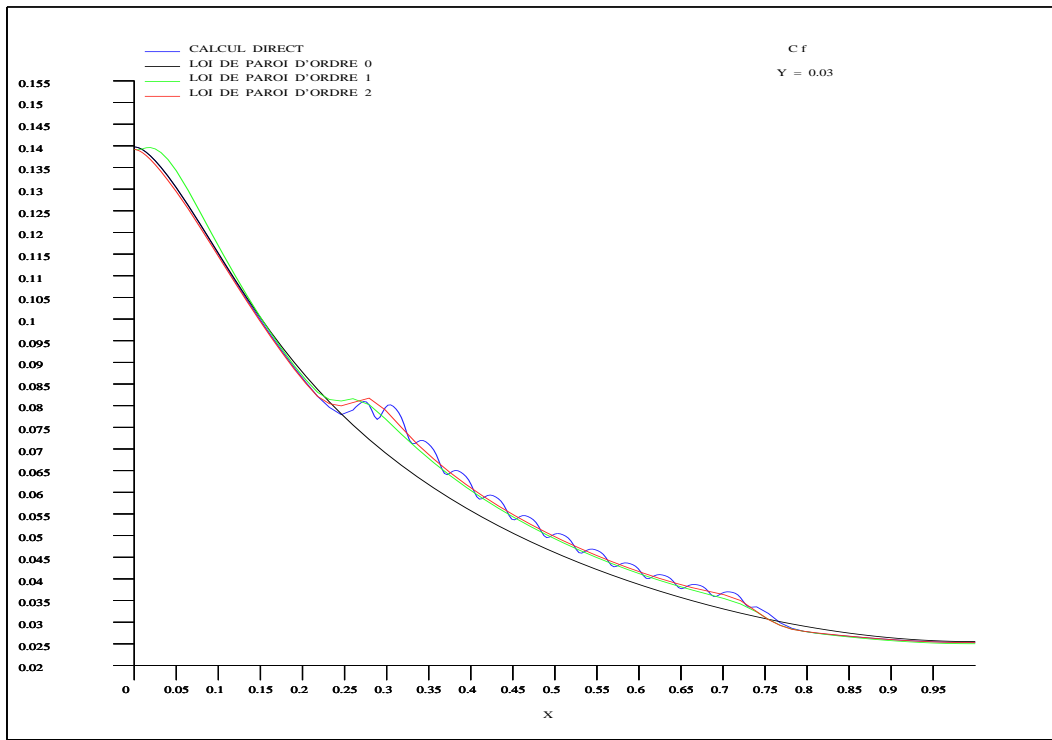


FIG. 31: Les lois de paroi d'ordre élevé améliorent la précision de l'approximation du C_f et de la pression (coupe à $x_2 = 0.03$) par rapport à l'ordre zéro.

6 Conclusion

Dans ce travail, on a développé de nouvelles lois de paroi pour des domaines rugueux, à partir d'une approche par décomposition de domaine. Cette nouvelle approche est naturelle, car on résout séparément les différentes échelles présentes dans le problème. Les lois de paroi construites par cette méthode s'adaptent à la géométrie des rugosités et simulent l'influence des petites échelles sur l'écoulement global.

Les lois de paroi ont été construites pour les problèmes de Laplace et Stokes. On a construit des lois de paroi d'ordre un et d'ordre deux et présenté des analyses de convergence. L'équivalence entre la nouvelle approche M.D.D. et celle obtenue par un développement asymptotique à deux échelles a été mise en évidence par un simple changement de variable, une fois la cellule tronquée à une certaine hauteur de la paroi. De plus, les lois de paroi sont indépendantes du choix de la hauteur, car les constantes d'homogénéisation varient en fonction de la hauteur choisie. L'influence de la hauteur de couplage sur la qualité de l'approximation est explicitée par l'analyse d'erreur.

Les validations numériques ont été faites en résolvant plusieurs problèmes de Stokes définis sur des domaines présentant des rugosités de différentes géométries. On a pu vérifier l'importance de l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé pour reproduire correctement les profils de vitesse, frottement et pression. Pour des rugosités plus importantes, l'utilisation des nouvelles lois est essentielle pour récupérer le décalage du profil de vitesse et les changements de profil du C_f dans les zones de transition entre plaque plane et plaque rugueuse. Si l'utilisation de la loi de paroi d'ordre un est essentielle, les lois de paroi d'ordre deux sont nécessaires principalement quand le gradient de pression est important ou quand des zones de discontinuité sont présentes dans le domaine. Ces dernières apportent une correction sensible sur les profils de vitesse et de frottement.

La méthodologie est très flexible pour traiter différentes formes de rugosités et l'implémentation numérique des lois de paroi prises sur forme faible est immédiate. Le gain sur le maillage et, en conséquence, sur le temps de calcul, est sensible. Les lois de paroi nous permettent d'utiliser des maillages quatre à cinq fois plus grossiers comparés à ceux utilisés dans un calcul direct, en gardant une excellente précision.

En conclusion, les lois de paroi construites à partir de la méthode de décomposition de domaine allient de bons fondements théoriques à d'excellents résultats numériques obtenus à faible coût. Leur utilisation constitue une alternative pratique pour baisser le coût du calcul dans le cas de problèmes comprenant différentes échelles. Cette approche pourra, par la suite, être étendue aux équations de Navier-Stokes dans le cadre de solutions isolées.

Références

- [1] Y. Achdou. Effet d'un mince revêtement métallisé sur la réflexion d'une onde électromagnétique. *C.R. Académie des Science, Paris*, t.314(Série I):217–222, 1992. for more complete version, INRIA report 1136, 1989.
- [2] Y. Achdou and O. Pironneau. Analysis of wall laws. *C.R. Académie des Science, Paris*, t.320(Série I):541–547, 1995.
- [3] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Construction des lois de paroi d'ordre 1 et 2 pour de domaines rugueux par analyse asymptotique. Technical report, INRIA, to appear.
- [4] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for high reynolds flows over periodic rough boundaries: Obtention and numerical validation. *submited to International of Computational Physics*.
- [5] Y. Achdou, O. Pironneau, and A. Zebic. Effective boundary conditions for thin coating. Technical Report R94001, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1994.
- [6] Y. Achdou, P. Le Tallec, F. Valentin, and O. Pironneau. Constructing wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques. *Comput. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151:215–232, 1998.
- [7] A. Carrau. *Modélisation numérique d'un écoulement sur paroi rugueuse*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1992.
- [8] A. Carrau, G. Galice, and P. Le Tallec. Taking into account surface roughness in computing hypersonic reentry bodies. *Applied Sciences and Engineering, R. Glowinski eds, Nova Science publisher*, pages 331–344, 1992.
- [9] C. Conca, J. Planchard, and M. Vanninathan. *Fluids and periodic structures*. Masson, France, 1995.
- [10] J. Cousteix. *Turbulence et couches limites*. Cepandues-Editions, France, 1989.
- [11] G. Dury and Alziary de Roquefort. Couche limite turbulente sur paroi rugueuse en régime supersonique. Technical report, CEAT, September 1995.
- [12] F. Glikson. *Couche limite sur paroi rugueuse*. PhD thesis, L'école Nationale supérieur de l'aéronautique et de l'espace - ONERA-CERT Poitiers, Décembre 1996.
- [13] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. *Maximun principles in differential equations*. Prentice-Hall, 1967.
- [14] F. Valentin, P. Le Tallec, and B. Mohammadi. Simulation des écoulements compressibles turbulents sur parois rugueuses. Technical Report 3108, INRIA, February 1997.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399